Faculteit der Exacte Wetenschappen	proeftentamen Complexe functies
Afdeling Wiskunde	12 mei 2007
Vrije Universiteit	21.00-....

Werk netjes, licht antwoorden duidelijk toe.

1. De complexe functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wordt gegeven door $f(z) = \cos z$. We schrijven $w = f(z)$, $w = u + iv$, $z = x + iy$.

   a) Druk u en v uit in x en y.

   b) Bereken $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

   c) Waarom is f complex differentieerbaar?

2. De complexe functie $f(z)$ wordt gegeven door

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 4}$$

   a) Bepaal de singulariteiten van $f(z)$ en bepaal in elke singulariteit van $f(z)$ het residu.

   b) Laat $R > 0$ en $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ geparametriseerd door $z(t) = R\exp(it)$, $0 \leq t \leq \pi$. Laat met een afschatting zien dat

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)dz = 0$$

   c) Bereken

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx \quad \text{en} \quad \int_0^\infty f(x)dx$$

3. In som 2 vervangen we de functie $f(z)$ door

$$f(z) = \frac{\exp(-iz)}{z^4 + 4}$$

   Bepaal de singulariteiten van $f(z)$, bereken de residuen die je nodig denkt te hebben, laat zien dat de integraal over de cirkel naar 0 gaat als $R \to \infty$, en bereken

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4 + 4} dx$$

4. Voor $0 \neq z \in \mathbb{C}$ en $\alpha \in \mathbb{C}$ schrijven we

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z) = \exp(\alpha(\log|z| + i \arg z)) = |z|^\alpha e^{\alpha i \arg z}$$

   Omdat $\arg z$ modulo veelvouden van 2π bepaald is, is dit een meerwaardige functie. De complexe functie $f(z)$ wordt gegeven door

$$f(z) = \frac{1}{z^\alpha(z+1)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

a) Laat $R > 0$ en $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Met de parametrisatie $z(t) = \exp(it) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, wordt de cirkel γ linksom doorlopen, met begin- en eindpunt in $(R, 0)$. Als in het beginpunt het argument van z nul is dan is het eindpunt het argument van z gelijk aan 2π. Laat met een afschatting zien dat

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)dz = 0$$

b) Bepaal het residu van $f(z)$ in $z = -1$.

c) Leg uit waarom de som van de residuen binnen γ ongelijk nul is en bereken

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(x+1)}dx$$

5. Laat zien dat

$$\frac{\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)} = \frac{\sin x \cos x - i\cosh y \sinh y}{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

6. Gegeven is de functie

$$G(z) = \pi \text{cotan} \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$$

a) Waarom is $G(z)$ analytisch op $\{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{Z}\}$?

b) Classificeer de singulariteit van $G(z)$ in $z = 0$ en geef de eerste twee termen van de Laurentreeks van $G(z)$ rond $z = 0$.

c) Laat zien dat $G(z) = G(z + 1)$ voor elke $z \notin \mathbb{Z}$.

d) Laat zien dat $G(z)$ begrensd is op $\{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}\, z| \geq 1\}$. Hint: gebruik de identiteit in som 5.

e) Lees het volgende aandachtig: in de som hierna laten we zien dat ook de functie

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}$$

periodiek is met periode 1, analytisch is op $\{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{Z}\}$, en begrensd is op $\{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}\, z| \geq 1\}$. De gegeven reeks is uniform convergent op begrensde deelverzamelingen van $\{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{Z}\}$ en $F(z)$ is daarom analytisch op $\{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{Z}\}$.

f) Laat zien dat de functie $F(z) - G(z)$ in $z = 0$ een ophefbare singulariteit heeft.

g) Laat met behulp van de Stelling van Liouville zien dat $F(z) - G(z)$ constant is.

h) Laat zien dat

$$\pi \text{cotan} \pi z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k}$$

Hint: $F(0) - G(0) = \ldots ?$

7. Voor $k, n \in \mathbb{N}$ worden de complexe functies $f_k(z)$ en $F_n(z)$ gegeven door

$$f_k(z) = \frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} = \frac{2z}{z^2-k^2}; \quad F_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k}$$

In deze som bekijken we de functie $F(z)$ uit som 6:

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

a) Classificeer de singulariteiten van $F_n(z)$.

b) Bereken $F_n(z) - F_n(z+1)$ en laat zien dat

$$\lim_{n\to\infty} (F_n(z) - F_n(z+1)) = 0$$

c) Laat $R > 0$ en $k > R$. De maximale waarde van $|f_k(z)|$ op $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ is

$$M_k(R) = \max_{|z|\leq R} |f_k(z)|$$

Bereken $M_k(R)$. Hint: voor welke z is $|z^2 - k^2|$ minimaal op $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \mathbb{R}\}$?

d) Laat $R > 0$ en $n > R$. Waarom is de reeks

$$\sum_{k=n}^{\infty} M_n(R)$$

convergent?

e) Laat zien dat $F_n(z) \to F(z)$ uniform op $\{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{Z}, |z| \leq R\}$.

f) Lees het volgende aandachtig: uit de uniforme convergentie in het vorige onderdeel volgt dat F analytisch is op $\{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{Z}\}$.

g) Laat zien dat $F(z) = F(z+1)$ (dus $F(z)$ periodiek is met periode 1).

h) Classificeer de singulariteiten van $F(z)$.

i) Schrijf $z = x + iy$. Laat zien dat voor $y > 0$ en $|x| \leq 1$ geldt dat

$$|f_k(z)| \leq \frac{2\sqrt{1+y^2}}{(k-1)^2 + y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}y}{(k-1)^2 + y^2}$$

Hint: $z^2 - k^2 = (z+k)(z-k) = (x+k+iy)(x-k+iy)$, dus $|z^2 - k^2| \geq \ldots$

j) Laat met het integraalcriterium zien dat voor $y > 0$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y}{k^2 + y^2}| \leq \frac{\pi}{2}$$

k) Laat zien dat $F(z)$ begrensd is op $\{z = x+iy : |y| \geq 1\}$. Hint: $F(z) = F(x+iy)$ is periodiek in x.