

# Differentiaalvergelijkingen en schoolwiskunde

Joost Hulshof

© Reproductie in overleg met auteur. Alle rechten voorbehouden.

# 1 Eerste orde differentiaalvergelijkingen

De aanleiding om dit stukje te schrijven is de discussie over de inhoud en vorm van de module Dynamische Modelleren in het nieuwe vak Wiskunde D op het VWO, en wat er binnen die module met differentiaalvergelijkingen gedaan zou kunnen worden. Ik ga daarom wat over differentiaalvergelijkingen vertellen en begin met een voorbeeld, de vergelijking

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}}.$$

Differentiaalvergelijkingen zijn vergelijkingen waarin de onbekenden functies zijn. De onbekende hier is de functie  $f$ . In deze vergelijking komen  $x$ ,  $f(x)$  en  $f'(x)$  voor. Voor elke  $x$  in het domein van  $f$  moet aan de vergelijking voldaan worden.

Dit is een ietwat omgeschreven versie van een differentiaalvergelijking die voorkomt in de afstudeerscriptie van Simon Tindemans, geschreven onder begeleiding van Bela Mulder van het AMOLF in Amsterdam. Als je de grafiek  $y = f(x)$  van  $f$  in het  $xy$ -vlak rond de  $x$ -as draait, krijg je een omwentelingslichaam dat in de context waarin de vergelijking is afgeleid overeenkomt met de celwand van een groeiende wortelhaar. Het domein van  $f$  is een interval dat zich uitstrekt van  $x = -\infty$  tot de tip van de cel in  $x = x_{tip}$ . Het bepalen van  $x_{tip}$  is onderdeel van het probleem. Vanwege de aannamen in de afleiding is voor  $x < x_{tip}$  de functiewaarde  $f(x) > 0$ . Als  $x$  van onder naar  $x_{tip}$  nadert moet  $f(x)$  naar 0 gaan. Voor  $x \rightarrow -\infty$  moet  $f(x)$  een positieve limietwaarde hebben. We bevinden ons hierbij al in een met de groeiende haar meebewegend assenstelsel. In de oorsprong zit een (meebewegende) bron die bouw materiaal wegschiet dat de celwand doet groeien. Aangenomen wordt dat tijdens het groeiproces de lokale structuur van de celwand hetzelfde blijft en ieder punt loodrecht naar buiten beweegt. De vergelijking wordt dan afgeleid als een balans tussen lokale oppervlaktegroei en toevoer van bouw materiaal dat met constante productiesnelheid uit de bron komt. Door van te voren al aan te nemen dat de celwand een vaste vorm heeft die als geheel beweegt in de richting van de positieve  $x$ -as, is het Tindemans gelukt om een eerste orde differentiaalvergelijking af te leiden.

In probleemstelling zitten twee natuurlijke fysische parameters:

de productiesnelheid en de hoeveelheid materiaal in de celwand per eenheid van oppervlakte. Ik heb in de beschrijving hierboven nergens fysische eenheden gebruikt. Door de eenheden van plaats, tijd en massa te schalen, met andere woorden, door ze handig te kiezen, kunnen deze twee *parameters uit de probleemstelling worden verwijderd*. Vandaar dat in deze differentiaalvergelijking geen parameters meer voorkomen. Dat maakt het probleem veel overzichtelijker. Het gaat alleen nog maar om het vinden van een oplossing die positief "begint" in  $-\infty$  en die bij een positieve  $x = x_{tip}$  nul wordt. De omvang van de haar ver achter de tip is bij benadering  $f(-\infty)$ , de limiet van  $f(x)$  voor  $x \rightarrow -\infty$ . Naar de vergelijking kijkend zien we dat zo'n oplossing alleen maar  $f(-\infty) = 2$  kan hebben. Je kunt bewijzen dat er precies één oplossing is met deze eigenschap en dat die oplossing het gewenste gedrag heeft. De  $x$ -waarde  $x = x_{tip}$  waar deze oplossing nul wordt is uniek bepaald. Er blijkt dat  $f'(x)$  naar  $-\infty$  gaat als  $x \uparrow x_{tip}$ . Dat is wel een vereiste want anders zit er een scherpe punt in de tip en dat is niet wat je vanuit de modelcontext verwacht.

Er is echter geen gesloten formule voor de oplossing. Ook het numeriek benaderen van de oplossing is lastig. Eigenschappen van de oplossing moeten daarom uit de differentiaalvergelijking zelf gehaald worden.

## 2 Schoolvoorbeelden

In de inleiding heb ik het over de grafiek  $y = f(x)$  van een functie  $f$  die voldoet aan een differentiaalvergelijking. Het is een algemene gewoonte om voor  $f$  en  $y$  dezelfde letter te gebruiken, bijvoorbeeld  $y = y(x)$ . Dat  $y$  links een (afhankelijke) variabele is en rechts een functie is een beetje verwarrend. Je moet weten waar je mee bezig bent. Voor de afgeleide schrijven we

$$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx},$$

soms met, soms zonder de onafhankelijke variabele  $x$ . Meestal een  $x$  als het om een plaatsvariabele gaat en de oplossing een vorm of profiel beschrijft. De standaardvorm voor een eerste orde differen-

tiaalvergelijking is

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad \text{of} \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y).$$

De vergelijking geeft in elk punt van het  $(x, y)$ -vlak de afgeleide die een oplossing (daar) moet hebben als hij door dat punt heen gaat. Het celwandvoorbeeld waar ik mee begon is overigens nog niet van deze vorm.

Als de oplossing een beweging moet beschrijven ligt een  $t$  als tijdvariabele voor de hand. In mijn eigen vakgebied, partiële differentiaalvergelijkingen, zijn de afhankelijke variabelen meestal functies van plaats en tijd en zijn de oplossingen bewegende vormen, zoals de celwand in de inleiding.

Ik behandel nu een paar voorbeelden. Differentiaalvergelijkingen worden algemeen als moeilijk ervaren, vandaar dat ik pleit voor een introductie met simpele voorbeelden, bij voorkeur met context, maar zonder onnodige ruis van quasi-realistische coëfficiënten.

## 2.1 Een flauw voorbeeld

Het eerste simpele voorbeeld is de differentiaalvergelijking

$$x'(t) = \frac{1}{t}.$$

Links schrijf ik de  $t$  er liever wel tussen haakjes bij omdat anders niet duidelijk is dat de  $t$  rechts de (onafhankelijke) variabele is. De keuze voor  $t$  (i.p.v.  $x$  bijvoorbeeld) is arbitrair. Het heeft als voordeel dat de  $x$  nu beschikbaar is als naam voor de afhankelijke variabele. Dat vind ik prettig omdat ik vaak aan oplossingen denk als aan bewegende punten op een lijn (of later in het vlak, in de ruimte etc.). Met  $t$  klinkt nu ook het begrip tijd door in de formuleringen en spreek ik over een beginwaarde voor  $x(t)$  op een begintijdstip, bijvoorbeeld

$$x(1) = 0.$$

De oplossing is eenvoudig te bepalen door de vergelijking links en rechts te integreren van 1 tot  $t$ . Dat geeft

$$x(t) - x(1) = \int_1^t \frac{1}{t} dt = \ln t.$$

Omdat  $x(1) = 0$  volgt

$$x(t) = \ln t = \int_1^t \frac{1}{s} ds,$$

waarbij ik toch maar liever een andere letter ( $s$ ) gebruik voor de integratie variabele. De functie  $\ln$  wordt vaak als deze integraal gedefinieerd (geen gesloten formule dus) en is de unieke oplossing van het beginwaarde probleem

$$x'(t) = \frac{1}{t}; \quad x(1) = 0.$$

Het maximale interval waarop de oplossing bestaat is  $(0, \infty)$ . Vanaf het begintijdstip kun je voor- en ook achteruit, maar bij  $t = 0$  houdt het op, omdat  $\frac{1}{t}$  daar te hard naar oneindig gaat om integreerbaar te zijn.

Ik noem dit een flauw voorbeeld omdat de onbekende functie  $x$  zelf niet in de vergelijking voorkomt. Wat ik daarom alleen heb hoeven gebruiken is dat, modulo een additieve constante, de functie  $\frac{1}{t}$  precies één primitieve functie heeft op  $(0, \infty)$ . Met de juiste keuze van de constante is er precies één oplossing met  $x(1) = 0$ . Wat dit voorbeeld laat zien is dat *beginwaardeproblemen nieuwe functies definiëren*, functies die meestal niet met eindig veel algebraïsche operaties (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) zijn te maken. Relevante eigenschappen, bijvoorbeeld de rekenregel  $\ln ab = \ln a + \ln b$ , volgen uit de definitie. Dat  $\ln t \rightarrow +\infty$  als  $t \rightarrow +\infty$  volgt omdat  $\ln t$  stijgt (want zijn afgeleide is positief) en omdat, aan de hand van Riemann-ondersommen, snel te zien is dat bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} \ln 2^4 = \ln 16 &= \int_1^{16} \frac{1}{s} ds > \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} &> \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} &= \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} \end{aligned}$$

Evenzo is  $\ln 2^{10} = \ln 1024 > \frac{10}{2} = 5$ . Het gaat tergend langzaam, maar we kunnen  $\ln t$  zo groot maken als we willen. Het leuke van dit

argument is dat het een zinvolle exercitie is met Riemann-sommen. Riemannsommen worden gebruikt om een integraal te definiëren (en meestal niet om integralen numeriek te benaderen). Belangrijk is ook het *redeneren met ongelijkheden*. Een wezenlijke en onmisbare eigenschap van  $\ln t$  als primitieve van  $\frac{1}{t}$  is nu eenvoudig en rechtstreeks uit de definitie afgeleid, en gekoppeld aan het inzicht dat

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots = \infty.$$

Een leuke context om deze divergerende oneindige som van positieve termen te illustreren is het stapelen van blokjes waar bij het bovenste blokje geen overlapping meer heeft met het onderste blokje. Als de blokjes lengte 2 hebben kan dit (net) als het eerste (bovenste) blokje 1 uitsteekt over het tweede blokje direct daaronder, het tweede blokje  $\frac{1}{2}$  over het derde blokje, het derde  $\frac{1}{3}$  over het vierde blokje, etc.

## 2.2 Exponentiële toename en afname

Het eerste echte voorbeeld van een differentiaalvergelijking waarin zowel  $x'(t)$  als  $x(t)$  voorkomen is natuurlijk

$$x'(t) = ax(t),$$

waarin  $a$  een gegeven constante is. Bij een eerste introductie van deze vergelijking is een directe keuze voor  $a$  te overwegen, liefst een simpele keuze, zoals  $a = 1$ . Deze differentiaalvergelijking beschrijft een tijdsafhankelijke grootheid  $x(t)$  waarvan de toename  $x'(t)$  op elk moment recht evenredig is met de grootheid  $x(t)$  zelf. De evenredigheidsconstante  $a$  is direct gekoppeld aan de keuze van de tijdschaal voor  $t$ . Een vroege discussie van schalen mag daarmee niet ontbreken. Met een intuïtieve uitleg kan de keuze voor  $\tau = at$  als nieuwe tijdsvariabele gemotiveerd worden. Voor een nadere uitleg ligt een notatie met differentiaalquotienten voor de hand. Beginnend met de differentiaalvergelijking voor lineaire groei,

$$\frac{dx}{dt} = ax,$$

deel je links en rechts door de evenredigheidsconstante  $a$  en haal je de  $a$  binnen de  $dt$ . Met de nieuwe tijdsvariabele  $\tau = at$  is  $adt = d\tau$

en voldoet  $x$  als functie van  $\tau$  weer aan

$$\frac{dx}{d\tau} = x.$$

De  $\tau$  wordt in de rol van nieuwe  $t$  vaak zelf weer  $t$  genoemd.

Het teken van  $a$  kan hierbij net zo goed negatief zijn. Het verschil tussen  $a > 0$  (groei) en  $a < 0$  (verval) zit alleen maar in de (nieuwe) tijdsrichting. Contexten voor  $a < 0$  zijn er legio, een hele mooie is radioactief verval en de toepassing in ouderdomsbepaling van dode materie m.b.v. de koolstof-14 methode, in wezen gebaseerd op het niet voorkomen van de onafhankelijke variable  $t$  in de differentiaalvergelijking.

### 2.2.1 Schuiven en schalen

Met het niet voorkomen van de onafhankelijke variable  $t$  in de differentiaalvergelijking maakt het niet uit waar we op de tijd-as  $t = 0$  als marker neerzetten. Hieruit volgt een belangrijke eigenschap van de oplossingen van  $x' = x$ . De oplossing bij een beginwaarde  $x(t_0) = x_0$  op begintijdstip  $t_0$  wordt verkregen door de oplossing met  $x(0) = x_0$  (zelfde beginwaarde maar op begintijdstip nul) in de  $t$ -richting  $t_0$  op te schuiven. Dus

$$x(t) \text{ voldoet aan } x' = x \text{ en is in } t = 0 \text{ gelijk aan } x_0$$

↓

$$x(t - t_0) \text{ voldoet aan } x' = x \text{ en is in } t = t_0 \text{ gelijk aan } x_0$$

Met grafieken is dit goed te verduidelijken en zien we het verband tussen opschuiven naar rechts en de vervanging van  $t$  door  $t - t_0$ .

Deze redenatie is toepasbaar op alle differentiaalvergelijkingen waarin de onafhankelijke variabele  $t$  niet expliciet voorkomt. De differentiaalvergelijking  $x' = x$  heeft ook nog de eigenschap dat

$$x(t) \text{ voldoet aan } x' = x$$

↓

$$Ax(t) \text{ voldoet aan } x' = x.$$

Een andere manier om dit te zeggen is dat in de vergelijking  $x' = x$  de afhankelijke variabele geschaald kan worden zonder dat de vergelijking verandert. Door deze twee implicaties te combineren, waarbij

we  $x_0 = 1$  nemen en  $A = x(t_0)$  zetten, krijgen we de volgende implicatie:

$$x(t) \text{ voldoet aan } x' = x \text{ en is in } t = 0 \text{ gelijk aan } 1$$

↓

$$x(t_0)x(t - t_0) \text{ voldoet aan } x' = x \text{ en is in } t = t_0 \text{ gelijk aan } x(t_0)$$

Maar dan zijn  $x(t)$  en  $x(t_0)x(t - t_0)$  aan elkaar gelijk in  $t_0$  en voldoen allebei aan  $x' = x$ . Als we weten dat  $x' = x$  gegeven een beginwaarde op  $t = t_0$  een unieke oplossing heeft, volgt dus voor de oplossing met  $x(0) = 1$  dat

$$x(t) = x(t_0)x(t - t_0).$$

### 2.2.2 De exponentiële functie

Deze multiplicatieve eigenschap geldt voor de oplossing van  $x' = x$  die in  $t = 0$  begint met  $x = 1$ . De exponentiële functie  $\exp$  is per definitie deze oplossing  $x(t)$ . Met (grondtal)  $e = \exp(1)$  volgt voor alle rationale  $t$  dat

$$\exp(t) = e^t,$$

eerst voor  $t = 0, 1, 2, \dots$ , daarna voor  $t = -1, -2, -3, \dots$  en voor  $t = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ , etc. Ook de positiviteit van  $\exp(t)$  en het limietgedrag voor  $t \rightarrow \pm\infty$  zijn eenvoudig in te zien.

Stellingen die precies maken onder welke aannamen beginwaardeproblemen unieke oplossingen hebben, lenen zich minder goed voor een behandeling op het VWO, maar het is instructief om het bewijs-idee los te laten op de vergelijking  $x' = x$  met beginwaarde  $x(0) = 1$ .

Integratie van  $x' = x$  van 0 tot  $t$  geeft (zie ook het flauwe voorbeeld)

$$x(t) - 1 = \int_0^t x(s) ds, \quad \text{ofwel} \quad x(t) = 1 + \int_0^t x(s) ds.$$

Stop er rechts een functie in en kijk wat er uitkomt dan wel misgaat (of toch goed?). Bijvoorbeeld

$$x(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t \neq 1,$$

niet goed. Dan maar

$$x(t) = 1 + t \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} \neq 1 + t,$$

ook niet goed. Nog een poging:

$$x(t) = 1+t+\frac{t^2}{2} \Rightarrow x(t) = 1 + \int_0^t \left(1+s+\frac{s^2}{2}\right) ds = 1+t+\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} \\ \neq 1+t+\frac{t^2}{2}.$$

Weer niet goed, maar met

$$x(t) = 1+t+\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} \Rightarrow x(t) = 1 + \int_0^t \left(1+s+\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2 \cdot 3}\right) ds \\ = 1+t+\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^4}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

begint het links en rechts nu wel veel op elkaar te lijken. De conclusie dat

$$x(t) = \exp(t) = e^t = 1+t+\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

ligt voor de hand.

De vraag is natuurlijk hoe het zit met de puntjes. Preciese behandeling hoeft hier nog niet. En waarom ook hier wel als het ook niet bij  $\frac{1}{3}$  en  $0.3333333333\dots$  gebeurt? Wel is nu het moment daar voor een zinnig gebruik van de GR. De leerling kan onderzoeken of er wel of niet iets mis gaat. Mooi moment ook om op de merken dat  $x(t) = \exp(t)$  het wint van elke macht van  $t$  als  $t \rightarrow +\infty$ . Hetgeen eenvoudig is in te zien door in de iteratie hierboven met ongelijkheden te werken: voor  $t > 0$  volgt uit  $x(t) > 0$  dat  $x(t) > 1$  en dus  $x(t) > 1+t$ , etc.

### 2.2.3 Differentievergelijkingen

Een andere manier om oplossingen te benaderen is met eindige differenties, dus

$$x'(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Vanwege een beroepsdeformatie m.b.t.  $\Delta$  schrijf ik  $h$  i.p.v.  $\Delta t$ . De differentiaalvergelijking  $x' = ax$  wordt dan vervangen door de differentievergelijking

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = ax(t).$$

Herschreven als

$$x(t+h) = x(t) + hax(t) = (1+ah)x(t),$$

is dit de voorwaartse methode van Euler voor de differentiaalvergelijking  $x' = ax$ .

De differentievergelijking kan ook direct worden afgeleid als een (exponentieel) groeimodel met continue tijd, nog voor dat differentiaalrekening aan de orde is geweest, maar wel nadat in een eerder stadium groeimodellen met discrete tijd zijn behandeld. Dat laatste liefst beginnend met een discussie (aan de hand van celdeling bijvoorbeeld) van de rij

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$$

#### 2.2.4 Binomium van Newton

Nadat in de modelvorming de variabele discreet is gemaakt, is de stapgrootte natuurlijk variabel. Onderstaande analyse van het steeds kleiner kiezen van de stapgrootte in het groeimodel is gebaseerd op het binomium van Newton. Een zelfde rekenpartij komt voor in de kansrekening bij de behandeling van de binomiale verdeling en de exponentiële verdeling.

Ik neem  $a = 1$  en bekijk de Eulerbenadering van de oplossing van  $x' = x$ . Met stapgrootte  $h$  en  $x(0) = 1$  krijgen we als benaderende oplossing op tijdstip  $t = 0 + h$ :

$$\tilde{x}(h) = (1+h)x(0) = 1+h.$$

Om aan te geven dat het om een benadering gaat gebruik ik niet  $x$  maar  $\tilde{x}$  in de notatie. Daarna nemen we  $t = h$  en vinden

$$\tilde{x}(2h) = \tilde{x}(h+h) = (1+h)\tilde{x}(h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2.$$

En zo verder. Met  $t = 2h$  volgt

$$\tilde{x}(3h) = \tilde{x}(2h+h) = (1+h)\tilde{x}(2h) = (1+h)^3 = 1+3h+3h^2+h^3.$$

Om een benadering  $\tilde{x}(t)$  op tijdstip  $t$  te berekenen kiezen we  $h$  zodat we met bijvoorbeeld 3 stapjes goed uitkomen. Met  $3h = t$  is  $h = \frac{t}{3}$  en wordt de benadering

$$\tilde{x}_3(t) = (1+h)^3 = 1+3+3h^2+h^3 = 1+3\frac{t}{3}+3\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^3,$$

subscript 3 om aan te geven dat we 3 stapjes doen om bij  $t$  te komen.

Hoe meer stapjes hoe beter mag je hopen. Zonder een te vroeg geïntroduceerde rekenmachine en de daarmee te winnen tijd is er ruimte voor het rekenen met eenvoudige breuken en binomium van Newton. Wat met ICT slechts moeizaam lukt is een benadering met 13 stappen niet alleen uitrekenen maar ook doorgronden. Met subscript 13 en  $h = \frac{t}{13}$  volgt

$$\tilde{x}_{13}(t) = \left(1 + \frac{t}{13}\right)^{13} = 1 + t + \frac{12}{13} \frac{t^2}{2} + \frac{12}{13} \frac{11}{13} \frac{t^3}{3 \cdot 2} + \frac{12}{13} \frac{11}{13} \frac{10}{13} \frac{t^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots,$$

een som met 14 termen. Wat met 13 stapjes kan gaat ook met 999999999 stapjes (1000000000 termen), doe het maar na en schrijf de eerste paar termen op. Regelmaat moet je leren zien. De voorfactoren komen van onder steeds dichter bij 1 te liggen als het aantal stapjes groter wordt genomen. Kortom ook hier zien we “in de limiet” als oplossing

$$1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3 \cdot 2} + \frac{t^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$$

Dit alles met alleen algebraïsche manipulaties en wat inzicht in het gedrag van breuken.

### 2.2.5 Omweg: oplossing via de logaritme

Aannemend dat de oplossing  $x(t)$  van  $x'(t) = x(t)$  in  $t = 0$  begint met  $x(0) = 1$  geeft deling door  $x(t)$  dat

$$\frac{1}{x(t)} x'(t) = 1.$$

We hebben gezien dat, voor  $t > 0$ , de afgeleide van  $\ln t$  naar  $t$  gelijk is aan  $\frac{1}{t}$ . Voor  $x > 0$  is de afgeleide van  $\ln x$  naar  $x$  dus gelijk aan  $\frac{1}{x}$ . Met de kettingregel volgt nu voor elke positieve oplossing  $x(t)$  dat de afgeleide van  $\ln x(t)$  naar  $t$  gelijk is aan

$$\frac{d}{dt} \ln x(t) = (\ln x(t))' = \frac{1}{x(t)} x'(t) = \frac{1}{x(t)} x(t) = 1.$$

Integratie van 0 tot  $t$  aan beide kanten geeft

$$\ln x(t) = t \quad \text{omdat} \quad \ln x(0) = \ln 1 = 0.$$

De functie  $\ln$  is gedefinieerd op  $(0, \infty)$  en stijgt van  $-\infty$  tot  $+\infty$ . De inverse functie van  $\ln$  kunnen we  $\exp$  noemen, en daarmee wordt de oplossing van  $x' = x$  met  $x(0) = 1$  simpelweg  $x(t) = \exp(t)$ .

### 2.2.6 Conclusies

Met schalen van  $t$  en  $x$ , en schuiven van  $t$ , is er eigenlijk maar één beginwaardeprobleem voor lineaire groei. Ook  $x$  kunnen we schuiven, en daarmee zijn alle vergelijkingen van de vorm  $x' = ax + b$  snel te herleiden tot  $x' = x$ . Er is geen enkele reden om steeds maar dezelfde voorwaartse Euler methode toe te passen op in wezen hetzelfde beginwaardeprobleem. Dat leidt niet tot inzicht en de tijd die daarmee gewonnen wordt kan beter gebruikt worden. In de echte praktijk wordt Euler ook nauwelijks gebruikt voor numerieke oplossingen. De expliciete uitwerking van de methode van Euler, zonder computer, is wel nuttig en leidt to het inzicht dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \exp(t) = e^t.$$

In een ietwat ludieke rente op rente context, met bijschrijvingen per jaar, per maand, per week, per dag, per uur, per minuut, per seconde, kunnen hier natuurlijke vragen van wiskundige aard in een toegankelijke context gezet worden.

## 2.3 Niet-lineaire groeivergelijkingen

Veel eerste orde differentiaalvergelijkingen die in modelleercontext voorkomen zijn van het type

$$x' = F(x),$$

waarbij nog steeds  $x = x(t)$ , bijvoorbeeld in de context van een populatie met een populatieafhankelijke groeifactor  $a = a(x)$ , zodat  $F(x) = a(x)x$ . Op grond van overwegingen in de modelvorming is  $a(x) > 0$  voor kleine  $x$  en  $a(x) < 0$  voor grote  $x$ . De keuze  $a(x) = A - Bx$  is soms gemotiveerd door het relatief makkelijk exact oplosbaar zijn van de vergelijking. Door  $t$  en  $x$  te schalen zijn  $A$  en  $B$  ook weer weg te werken.

Scheiding van variabelen, via

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F(x)} dx = dt \quad \Rightarrow \quad G(x) = t + C,$$

waarbij  $G(x)$  een primitieve is van  $\frac{1}{F(x)}$  en  $C$  een willekeurige integratie constante, is een manier om deze vergelijking aan te pakken, maar de laatste stappen, het vinden en inverteren van  $G$ , zijn vaak lastig. De meeste relevante eigenschappen van de oplossing zijn veel makkelijker rechtstreeks uit de grafiek van  $F$  af te leiden via een kwalitatieve analyse.

De methode werkt ook als  $F$  een wat algemenere functie is en hanteerbare exacte oplossingen moeilijk te vinden zijn. De aanpak gebruikt twee plaatjes. In het eerste plaatje, zeg maar de routekaart, schetsen we de grafiek van de gegeven functie  $F$ , bijvoorbeeld  $F(x) = x(1 - x)$ . Cruciaal is natuurlijk dat de leerling weer leert zien dat dit makkelijk is, zonder uitgebreid functieonderzoek, maar vooral ook zonder de ballast van een rekenmachine. Wat we aan de grafiek zien is het tekenverloop van  $x(1 - x)$ . Dat vertelt ons of oplossingen stijgen of dalen. We merken eerst op dat de nulpunten  $x = 0$  en  $x = 1$  de evenwichtoplossingen zijn van de differentiaalvergelijking. Dat zijn oplossingen die niet van  $t$  afhangen. Daarvan tekenen we de grafiek in één  $(t, x)$ -vlak, twee horizontale lijnen dus. Dit wordt onze tweede plaatje, waarin we een aantal oplossingen tekenen om tot een snel begrip van het kwalitatieve gedrag van alle oplossingen te komen.

We kijken eerst naar een oplossing met beginwaarde op  $t = 0$  gelijk aan een  $x_0$  tussen 0 en 1, dus

$$x(0) = x_0 \in (0, 1).$$

Die oplossing heeft in het  $(t, x)$ -vlak, waarin we de horizontale lijnen  $x = 0$  en  $x = 1$  al als grafieken van de evenwichtoplossingen hebben staan, een grafiek die begint in het punt  $(t, x) = (0, x_0)$ . De grafiek moet daar een positieve helling hebben omdat  $x(0) = x_0 \in (0, 1)$  en  $x'(t) = x(t)(1 - x(t)) > 0$  voor  $x(t) \in (0, 1)$ . Zo lang  $x(t) \in (0, 1)$  blijft  $x'(t) > 0$ . Voor  $t > 0$  kan dat maar op één manier misgaan, namelijk als de grafiek ergens door  $x = 1$  heen gaat. Maar dan zouden we in de buurt van dat punt, zeg  $t = t_0$ , twee grafieken van twee oplossingen met dezelfde waarde (namelijk 1) in  $t = t_0$

hebben, de oplossing die begint in  $x(0) < 1$  en in  $t_0$  voor het eerst 1 wordt, en de evenwichtoplossing 1 zelf.

Zoals we al eerder uitgelegd (niet bewezen) hebben kan dat niet. Kortom  $x(t)$  blijft wel stijgen maar gaat nooit door  $x = 1$  heen. De grafiek heeft dus een horizontale asymptoot. Dat die asymptoot  $x = 1$  is kan daarna ook weer uitgelegd worden, zonder een hard bewijs maar wel met de goede reden: een lager gelegen asymptoot zou impliceren dat  $x'(t) = x(t)(1 - x(t))$  een positieve limietwaarde heeft als  $t \rightarrow \infty$ , hetgeen niet kan met een horizontale asymptoot.

We concluderen dus dat de grafiek van de oplossing  $x(t)$  die begint in  $x_0 \in (0, 1)$  voor  $t \rightarrow +\infty$  horizontale asymptoot  $x = 1$  heeft. Met exact dezelfde redenatie is  $x = 0$  de horizontale asymptoot voor  $t \rightarrow -\infty$ . Uit de grafiek van  $F$  zien we ook dat  $x = 1$  een stabiel, en  $x = 0$  een onstabiel evenwicht is. Begin maar in de buurt van het evenwicht en kijk of  $x' = F(x)$  je terug- of wegduwt. Oplossingen tussen  $x = 0$  en  $x = 1$  hebben allemaal hetzelfde profiel, door schuiven gaan ze in elkaar over en kun je ze in  $t = 0$  elke waarde tussen 0 en 1 geven. Het profiel loopt immers van 0 tot 1.

In de modelcontext zijn dit de conclusies waar het om draait bij de analyse van de differentiaalvergelijking  $x' = x(1 - x)$ . Dat elke oplossing met een beginwaarde tussen 0 en 1 naar de limietwaarde 1 convergeert, hoe klein ook de beginwaarde, kan geruststellend of alarmerend zijn. Alleen het tekenverloop en een ruwe schets van de grafiek van  $F$  zijn hiervoor nodig.

Met de andere oplossingen is iets gekks aan de hand. Een oplossing  $x(t)$  die negatief begint in  $t = 0$  daalt voor  $t > 0$  en wordt niet meer tegengehouden door een evenwicht. In de vergelijking  $x' = x(1 - x)$  wordt de invloed van de 1 in de factor  $(1 - x)$  dus steeds kleiner. Daarmee is te verwachten dat de oplossing gedrag gaan vertonen dat lijkt op het gedrag van oplossingen van  $x' = -x^2$ . De laatste vergelijking is makkelijk op te lossen door een macht van  $t$  te proberen, of door scheiding van variabelen:

$$x'(t) = -x(t)^2 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{1}{x(t)} \right)' = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{t + C}$$

De grafiek van de oplossing heeft dus een verticale asymptoot, een conclusie die, zonder exacte oplossen, ook wel te trekken is voor negatieve oplossingen van  $x' = x(1 - x)$ . In eindige tijd vliegt  $x(t)$

naar  $-\infty$ . Een soortgelijke discussie geldt voor oplossingen  $x(t) > 1$  als je terugloopt in de tijd, met  $x(t) \rightarrow +\infty$ . Vooruitlopend in de tijd gaan deze oplossingen weer naar 1 (de grafiek van  $x(t)$  heeft horizontale asymptoot  $x = 1$ ).

Wat is er nog meer te zeggen? Extrema van  $F$  corresponderen met extrema voor  $x'(t)$ , dus met buigpunten van de grafiek van oplossingen  $x(t)$ . De afgeleiden in de nulpunten van  $F$  bepalen hoe hard je (exponentieel) terug- of wegloopt van het evenwicht. Verder hebben oplossingen van  $x' = F(x)$  geen extremen. Als je dus een proces wil modelleren met differentiaalvergelijkingen, met de wetten van vandaag hetzelfde als die van morgen, weet je dus dat er tenminste twee grootheden een rol moeten spelen als dat proces een oscillatie vertoont.

Joost Hulshof, Oegstgeest, 11-4-2007