

Reactie op <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/deel08/sep2007/savelsbergh.pdf>. In sommige deelgebieden van de wiskunde lijkt de tastbare werkelijkheid ver weg, zo begint Elwin Savelsbergh zijn artikel over de aanzet tot een curriculum dynamisch modelleren. Dat verbaast me. Bijna alle wiskunde die ik me sinds mijn schooltijd heb eigen gemaakt, en nog hoop eigen te maken, heeft alles met de werkelijkheid te maken. Natuurlijk, een excursie die even afstand, soms grote afstand, tot de werkelijkheid neemt, kan leuk, productief en later ook nog nuttig zijn. "Back to irreality" was de slogan waarmee ik destijds, met plezier, de lessen complexe getallen bij Wiskunde 2 weer begon. Hoe ver ik er naast zat bleek later: de imaginaire wortel uit min een is niet meer weg te denken uit alle technische luxe die we nu voor vanzelfsprekend houden.

Maar goed, de binnenkomer dient als contrast voor het dynamisch modelleren, volgens Elwin in de 20-ste eeuw tot grote bloei gekomen dankzij de opkomst van numerieke technieken. Onvermeld blijft dat nagenoeg alles wat we in de schoolboeken leren over differentiaal- en integraalrekening is terug te voeren is op Newton's verklaring van de wetten van Kepler. Voor mij misschien wel HET hoogtepunt in het dynamische modelleren tot nu toe, ontwikkeld zonder wat voor modelleertools dan ook. Het numerieke werk dat daar mede aan ten grondslag lag gebeurde gewoon met de hand.

Verderop betoogt Elwin dat mechanica minder voor de hand ligt als invoeringscontext. Een voortdurende bron van begripsproblemen, aldus een observatie gefundeerd op drie referenties die verder zonder uitleg blijft. Biologische en met name ecologische toepassingen bieden DUS een beter startpunt. Dat alle relevante wetten in de mechanica nu bekend zijn, dient eerder in zijn verhaal al als overgang naar een introductie van deze context, waarin de interesse (noodgedwongen) vaak eerder kwalitatief dan kwantitief is. Dat ik de keuze voor deze context slecht onderbouw vind, is echter geen reden om deze context op voorhand af te wijzen als playground voor de introductie van dynamisch modelleren. Maar laten we ons dan wel goed realiseren hoe moeilijk het (nog) is om in deze context tot goede wiskundige modellen te komen.

Elwin pleit voor contexten waarin verschillende typen modelleerproblemen te herkennen zijn, die voldoende complex zijn om tot een proces van voortgaande modelontwikkeling te leiden, en ook nog voldoende aansluiten bij de voorkennis van de leerlingen om die leerlingen zelf bij te kunnen laten dragen. Het wiskundig modelleren moet leiden tot toetsbare verwachtingen die volgen uit op grond van veronderstelde werkingsmechanismes afgeleide modelregels. Dat is nogal wat. Mag ik om te beginnen voorstellen dat we zulke regels dan duidelijk en wiskundig precies formuleren?

Neemt het (eerste) voorbeeld, de griep-epidemie. Elwin formuleert in woorden een mogelijk eerste model waarin expliciete getallen voorkomen, getallen die even daarvoor zijn aangekondigd zijn als zinvolle schattingen gebaseerd op voldoende kennis, van de leerlingen, over de in het model benodigde parameters. Waarom dan niet eerst voor beide parameters een symbool ingevoerd vraag ik me dan af. De zinvolle schattingen zijn toch pas mogelijk als bij de wiskundige modelvorming de benodigde parameters (als parameter) geïdentificeerd zijn? Het gehele getal 5 komt nu twee keer voor als zo'n meteen expliciet gemaakte parameter. Twee keer hetzelfde getal is ongelukkig, temeer nog omdat er in beide gevallen geen enkele reden is waarom deze verschillende parameters geheel zouden moeten zijn. Het gaat immers om verwachte gemiddelde aantallen. De keuze voor gehele getallen is onjuist en misleidend. De derde parameter is geen gemiddelde maar een kans. Een getal dus tussen 0 en 1, ik zou weer zeggen  $p$ , met, bijvoorbeeld als schatting voor  $p$  Elwin's waarde  $p = 0.2$  (hetgeen iets anders is dan  $p = \frac{1}{5}$ , maar dat terzijde). Daarna wordt verder geredeneerd met een klaarblijkelijk deterministisch model, zonder ook maar een woord te besteden aan wat daaraan voor redenatie ten grondslag ligt. De discussie over het al dan niet geheelwaardig zijn van de in een modelleertool gesimuleerde oplossing maakt het alleen maar erger, en bevestigt de eerdere indruk dat het onderscheid tussen aantallen, gemiddelde of verwachte aantallen, en kansen niet gemaakt wordt. De constatering dat de uitkomsten, wat die ook mogen betekenen, "duidelijk geen realistisch gedrag" leveren wordt niet toegelicht. De uitbreiding van het model bevat weliswaar meer ingrediënten, maar was een discussie over het draaien aan de parameters niet beter eerst aan de orde geweest?

Na het verborgen gebleven onderscheid tussen deterministisch en probabilistisch, volgt wel een discussie over discreet versus continu, omdat die van oudsher gescheiden worden behandeld, op school althans. Hier komt eerst de stapgrootte aan de orde, hetgeen toch vooral betrekking heeft op het numeriek oplossen van de differentiaalvergelijkingen in een continu model. Dat oplossen doe je bij voorkeur niet met de voorwaartse methode van Euler, die vaak in de afleiding van het continue model gebruikt wordt. Ik vind het ongelukkig om de in de praktijk vaak gebruikte Runge-Kutta methode voor het oplossen van een differentiaalvergelijking, die eerder als wiskundig model is voorgesteld, aan te duiden als een discrete numeriek model. En gebruik

je wel een model dat er uitziet als een Euler schema, maak dan duidelijk of het vanaf het begin om discreet model gaat, dan wel om een eerste poging een continu model numeriek door te rekenen.

Als tweede modelcontext komt radioactief verval aan de orde. De constatering dat de stralingsactiviteit recht evenredig is met de hoeveelheid radioactief materiaal, is aanleiding voor een thematisering van de keuze voor de tijdstap. Dat vind ik een onlogische stap. De in woorden gedane uitspraak leidt rechtstreeks tot de differentiaalvergelijking  $y'(t) = -ay(t)$ , met  $a$  de evenredigheidsconstante en  $y(t)$  de hoeveelheid materiaal. Het verschil tussen  $a$  groot en  $a$  klein uitleggen aan de hand van het begrip tijdstap, is een ongelukkige voorstelling van zaken. Veel beter zou het zijn om hier, eerst in woorden (seconde, minuut, uur, dag, week, maand, jaar) uit te leggen dat er verschillende tijdschalen zijn, en dat met de keuze van minuten in plaats van seconden de constante  $a$  zestig keer zo klein wordt. Inzicht in de kracht en eenvoud van schalingsargumenten is een noodzakelijke voorwaarde om wat dan ook wiskundig te modelleren. Mijn inziens wordt dit in Elwin's bijdrage ten onrechte genegeerd. Hier ligt ook een duidelijk verband met de hedendaagse miskennis van het belang van breukrekenen, dat in de afgelopen jaren dankzij het veel te vroege gebruik van rekenmachines bij het grof vuil is gezet.

Na de genoemde constatering en de onvermeld gebleven differentiaalvergelijking, komt bij Elwin eerst een meetverhaal over halfwaardetijden en het bepalen van de halfwaardetijd als die tijd erg groot is. Als eerste model wordt daartoe, alleen in woorden, de differentiaalvergelijking  $y'(t) = -a$  gesuggereerd, dat vervolgens door leerlingen moeten worden verworpen om, daarna pas, te komen tot een rekenmodel. Even later is er nog steeds sprake van een tijdstap die nog naar nul moet gaan. Terwijl vanaf het begin in de formulering niets er op wijst dat er geen sprake is van continue tijd. De differentiaalvergelijking  $y'(t) = -ay(t)$ , die toch echt een centrale plaats heeft in het modelleren, en een essentiële rol speelt in de theorie van exponentiële functies, blijft onvermeld. Het aldus verkregen inzicht (?) wordt belangrijker gezien dan het vinden van de bijbehorende analytische oplossing. Maar wat valt er dan op te lossen?

Niet-lineaire modellen en hogere orde modellen (waarmee de facto vanaf hier differentiaalvergelijkingen worden bedoeld, terwijl  $y'(t) = -ay(t)$  DV nog steeds onvermeld is), worden ingeleid met de observatie dat lineaire eerste modellen (i.e. de DV met verschillende waarden voor  $a$ ) geen problemen meer geven en ook maar een beperkte draagwijdte hebben. Wat ik mis is de verklarende constatering dat er in feite maar sprake is van één model. Ik ben het oneens met de nadruk die wordt gelegd op de numerieke oplossing bij dit éne model. Die is overbodig en leidt alleen maar af. Kwalitatieve analyse is bij deze éne DV inderdaad niet erg lastig. Maar zoals Elwin het schrijft klinkt het of juist dat ook een reden is om andere DV's of modellen te gaan bekijken. Daarmee lijkt het of, na numeriek (laten) rekenen, nu kwalitatieve analyse het middel is dat doel is geworden.

De DV die aan de orde komt als eerste niet-lineaire model, is een veel gebruikt maar lastig kwantitatief te maken model voor de groei van, bijvoorbeeld, een rupsenpopulatie. Waarom rupsen? En wat bedoelen we hier met dichtheden? In de DV komen een aantal parameters voor die benoemd worden in "biologische" termen, waarvan ik me afvraag of duidelijk is wat ze betekenen, zo ze al wat betekenen. Dat is een probleem dat inherent is aan deze context, en waarmee je moet omgaan, ook al is vaak niet duidelijk hoe. Wiskundig modelleren in deze context is nu eenmaal lastig. Hoe leerlingen dit model zouden moeten afleiden zie ik niet meteen.

In de rupsen-DV staan vier parameters. Numerieke analyse middels het scannen van het gedrag bij verschillende beginwaarden en onder variatie van alle parameters lijkt dus een onoverzichtelijke klus. Ook dat wordt wel een wat ander verhaal als je, als begin van een kwalitatieve analyse, wat eenheden schaalt. Het uitvoeren van een kwalitatieve analyse aan de hand van de grafiek van  $dN/dt$  versus  $N$ , die in dit geval zowel numeriek als analytisch werk kan ontberen, ondersteun ik van harte. Die analyse zou ik echter nadrukkelijk combineren met bijvoorbeeld de observatie dat het model met  $\alpha = 0$ , dus de DV  $dN/dt = rN(1 - N/K)$  met  $r > 0$  en  $K > 0$  ook maar één model is, dat dus niet eindeloos voor verschillende waarden van  $r > 0$  en  $K > 0$  hoeft te worden uitgekauwd.

Het inleidende verhaal dat voorafgaat aan de rupsen-DV, waarin het gedrag van dynamische systemen wordt gecategoriseerd, vind ik onduidelijk. Componenten van het model en gedrag van oplossingen lopen hier door elkaar heen. In dit verband: de eerder genoemde beschrijving in de visie van de Natuurkunde commissie, met de wiskunde als een taal om te modelleren, lijkt het wiskundig oplossen te negeren. Nog een reden om het onderscheid tussen de wiskunde als taal en de wiskunde als tool beter te maken.

Tweede orde systemen en fasevlak analyse vormen een logisch en leuk vervolg op de kwalitatieve analyse.

De argumentatie om hieraan de voorkeur te geven boven mechanische systemen blijft echter rusten op de ongefundeerde afwijzing van versnelling als een aanschouwelijk begrip. Numeriek problemen (bij Euler's methode) en gebrek aan kwalitatief inzicht bij ecologische problemen, twee verschillende zaken, zijn daarna reden om alsnog wel de slingervergelijking te bekijken. Ik kan deze gedachtengang moeilijk volgen, maar ben wel een groot voorstander van een behandeling van deze vergelijking, eerst met eenheden, inclusief de overgang van niet-lineair naar lineair in de afleiding, en daarna een verstandige schaling van de tijd om uit te komen op  $\phi''(t) + k\phi'(t) + \phi(t) = 0$ , en een (misschien niet alleen) numerieke behandeling van de afhankelijkheid van  $k > 0$ . Een uitleg aan de hand van het medium, lucht of water bijvoorbeeld, waarin de slinger hangt, maakt dit alleen maar tastbaarder. De afleiding van de chaotische slinger (met dubbele arm) is inderdaad (te?) lastig, maar met een trillend ophangingspunt is net zoveel spektakel te bereiken, en dat kan denk ik wel gedaan worden. De Lorenz (zonder t) vlinder kan als curiositeit aan de orde komen maar niet meer dan dat, mede om de reden die Elwin geeft: nauwelijks een tastbaar verband met de werkelijkheid (maar wel een reuze leuk verhaal over hoe ontwikkelingen kunnen gaan in de wetenschap).

Elwin's suggestie om pas later over analytisch oplossen te praten zou betrekking kunnen hebben op de slingervergelijking, maar is wat mij betreft verkeerd voor de vergelijkingen die hij hier in gedachten heeft (oplossingen  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ), waarbij van oplossen nauwelijks sprake is. De opmerking over wiskundige reflectie en het belang van lineairiseren en vereenvoudiging in verband met chaos, en de verwijzing naar het artikel van Henk Broer, ontgaan me enigzins, verwijst dit naar periode verdubbelingen bij de Verhulst afbeelding of naar variaties op de slingervergelijking?

In het laatste gedeelte van het artikel komen modelleertools aan de orde. Daarmee is het mogelijk om in woorden geformuleerde regeltjes, zoals bij het griepmodel, in te voeren als, zo lijkt het althans, differentiaalvergelijkingen, die daarna weer discreet opgelost worden. Ook hier is onduidelijk wat er precies gebeurt. Is het model continu en daarna de oplossingsmethode numeriek weer discreet, of is het model vanaf het begin discreet? Sommige onderwijsdeskundigen en vakdidactici zijn er voorstander van om van het begin af aan voor al het modelleren gewoon één zo'n tool te pakken en de leerlingen daarmee aan de slag te laten gaan. Ik vind dat schrikbarend. Zelfs al zouden de leerlingen de tool zo in de vingers krijgen dat ze er mee aan de slag kunnen (hetgeen ik betwijfel), vanaf dat moment zitten ze opgesloten binnen de grenzen van de modelleertool. Een soort a priori afgebakend deel van het intellectuele universum waarbinnen alle activiteit moet plaats vinden. Zit hier ook de gedachte achter dat de wiskunde af is en alleen nog maar in apparaatjes gestopt moeten worden die het (denk)werk doen? Ik ben niet mordicus tegen het gebruik van hulpmiddelen, maar wees er terughoudend mee. We hebben gezien tot wat voor ellende de misvatting dat computers beter zijn in algebra kan leiden. Zorg ook hier juist dat leerlingen eerst begrijpen wat ze in simpele gevallen moeten en (zelf) kunnen doen, en verken eerst de grenzen van de eigen mogelijkheden.

Door het verhaal heen loopt een discussie met cTWO. Toen ik de eerste versie van de module Wiskundig Modelleren onder ogen kreeg, wist ik nog niet eens wat cTWO was. Op de school van mijn zoon werd deze versie, afkomstig van de site van cTWO, overwogen voor Wiskunde D en NLT samen. Dat idee sprak me erg aan, maar ik schrok me een ongeluk toen ik het materiaal bestudeerde. Rondmailen leidde tot berustende reacties bij collega's. Op de receptie na de oratie van Mark Peletier sprak ik Dirk Siersma aan op wat ik gelezen had. Hij stelde me voor aan Paul Drijvers van het FI, als zijnde een van de makers van het materiaal. De discussie daarna begon van zijn kant met de uitleg dat bij het maken van de methode gekozen was voor een systeem dynamica aanpak, de wereldstandaard op het gebied van dynamisch modelleren, Club van Rome, etc. Ik heb mijn bezwaren toen in detail en ongezoeten opgeschreven. Tot een inhoudelijke discussie heeft dat niet geleid. Ach ja, dat zal wel aan mij liggen. Met Harm Houwing van Getal en Ruimte ben ik op precies dezelfde manier in de clinch gegaan over wat ik in hun boeken las, en dat heeft geleid tot een vruchtbaar overleg met hem, Jan van de Craats en Mark Peletier. De nieuwe boeken van G&R zijn een hele stap vooruit, mede dankzij de inzet van Harm en zijn collega's.

Gelukkig is in cTWO besloten om niet verder te gaan met de module Dynamisch Modelleren die ik gezien had, maar helaas heeft dat ook tot het splitsen van Dynamisch Modelleren voor NLT en Wiskunde D geleid. Als Elwin schrijft dat de de module Wiskundig Modelleren aanvankelijk bedoeld was voor Wiskunde en NLT gezamenlijk, maar dat na verloop van tijd de visies toch te verschillend waren, is dat maar een deel van het verhaal. Wat er misgegaan is dat op het FI al vast bedacht was wat er in zo'n module zou moeten komen, en hoe dat afgezet moest worden. Inhoudelijk overleg met deskundigen was daarbij niet belangrijk en is, ondanks de bereidheid daartoe van mij en anderen, afgehouden. Daarna was het te laat.