# De Navier-Stokes vergelijkingen

Josephus Hulshof*

January 25, 2010

Al lang voor de lijst met millennium problemen door het Clay Institute was opgesteld circuleerde een grap over de belangrijkste onopgeloste problemen in de wiskunde die God in een interview met wiskundigen zou behandelen. De grap had vele versies maar de punch line was meestal een door een fysicus gestelde vraag in de trant van "What about well-posedness for the Navier-Stokes equations in dimension 3?" en het antwoord "Next question".

Wiskundigen schrijven de eerste van de twee Navier-Stokes vergelijkingen meestal in de vorm

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = \mu \Delta v.$$

In deze vergelijking zijn $v$ en $p$ de onbekenden, namelijk de snelheid en de druk van (bijvoorbeeld) stromend water, en is $\mu$ een parameter die iets met de viscositeit de maken heeft. De wiskunde symbolen vergen enige uitleg, maar de eerste twee termen hebben met versnelling te maken. Het symbool $\nabla$ komt ook voor in de tweede vergelijking,

$$\nabla \cdot v = 0,$$

die in wiskundige termen formuleert dat de vloeistof niet-samendrukbaar is. De eerste vergelijking beschrijft hoe onder invloed van de ten gevolge van drukverschillen en andere in het water werkzame krachten de stroming en daarmee ook de druk verandert.

Twee vergelijkingen voor twee onbekenden, waaruit de $p$ kan worden weggewerkt, waarna een niet-lineaire vergelijking overblijft voor $v$. Het probleem is echter dat niemand weet of deze vergelijking voldoende is om de stroming te beschrijven. Dat hangt nauw samen met het ook fysisch bij lange na niet begrepen fenomeen van turbulentie. Wiskundig gezien zijn de vergelijkingen prachtig in dimensie 2, in Flatland dus, maar in dimensie 3 is het een ramp. Hoe zit dat?

*Afdeling Wiskunde, Vrije Universiteit Amsterdam

Uitleggen wat hierboven staat is al een hele klus. Alle aspecten van het probleem zijn echter te relateren aan simpele vragen zoals die van een fysicus: wat gebeurt er als ik de eenheden schaal? Schalen is een onmisbare brug die wiskunde met de natuurwetenschappen verbindt. Net als de stelling van Pythagoras. Van

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{via} \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

tot turbulentie als het misgaan van oneindige Pythagoras-sommen. Waarbij ook simpele differentiaalvergelijkingen als

$$\frac{dv}{dt} = -\mu v + v^2$$

nog langskomen, ook niet-lineair, of toch wel?

# 1 Wat staat er?

Ik raad iedereen aan om hier Feynman's expositie over droog en nat water in zijn befaamde Feynman lectures (volume II) op na te slaan, vooral ook omdat ik in het onderstaande de uitleg van de visceuze termen wat heuristischer en met enig gebrek aan eerbied voor de natuurkunde heb aangepakt.

## 1.1 Het snelheidsvectorveld

De snelheid (*velocity*) $v$ is een vector,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

De grootte van de snelheid (*speed*) is de lengte van $v$ en wordt gegeven door Pythagoras:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

We zullen schrijven

$$v^2 = |v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

voor het kwadraat van de *speed*. De snelheid hangt af van de tijd $t$ en van de positie $x = (x_1, x_2, x_3)$. Dus $v$ staat voor 3 functies van 4 variabelen. Voor elke vaste $t$ staat $v(t)$ voor het vectorveld dat in elk punt $x$ van het stroomdomein een vector (pijltje) definieert dat aangeeft hoe hard en in welke richting het water stroomt. Voor het stroomdomein nemen we voor het gemak nu even de kubus

$$K = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 1\}.$$

We zullen veel partieel integreren en daarbij voor de stoktermen steeds gebruiken dat $v = 0$ op de rand van $K$, omdat we aannemen dat op de rand van het stroomdomein er geen stroming is.

## 1.2 Versnelling

De eerste van de twee Navier-Stokes vergelijkingen is als volgt op te hakken:

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v}_{\text{versnelling}} + \underbrace{\nabla p}_{\text{drukverschillen}} = \underbrace{\mu \Delta v}_{\text{visceuze krachten}}.$$

De versnelling is dus *niet* alleen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix},$$

de vector met de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial t}$$

van $v_1$, $v_2$, $v_3$ naar $t$, maar bevat ook een term waarin $v \cdot \nabla$ werkt op $v$. Hier staat $\nabla$ voor de *gradient* operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

en de punt voor inwendig product, dus

$$v \cdot \nabla = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

zodat

$$(v \cdot \nabla)v = v_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v}{\partial x_3}.$$

De reden waarom deze *niet-lineaire* term in de vergelijkingen staat is dat de versnelling van een deeltje met baan gegeven door $x = \xi(t)$, i.e.

$$x_1 = \xi_1(t), \quad x_2 = \xi_1(t) \quad x_3 = \xi_3(t),$$

gelijk is aan

$$\frac{d}{dt} v(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), t).$$

Bij uitwerken met de kettingregel krijgen we ook de afgeleiden van $v$ naar $x_1$, $x_2$, $x_3$, vermenigvuldigd met, respectievelijk, de afgeleiden van $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ naar $t$, waarbij we moeten gebruiken dat

$$\xi_1'(t) = v_1(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), t),$$

etc. Daarom krijgen we voor de versnelling (op plaats $x$ en tijdstip $t$)

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v}_{\text{versnelling}} = \frac{\partial v}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v}{\partial x_3}.$$

Dit is weer een vector is, want $v$ heeft nog steeds 3 componenten.

## 1.3 Krachten

Hoe zit het met de andere termen? In het opschrijven van

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v}_{\text{versnelling}} + \underbrace{\nabla p}_{\text{drukverschillen}} = \underbrace{\mu \Delta v}_{\text{visceuze krachten}},$$

zijn we uitgegaan van water, dus van massadichtheid gelijk heeft aan 1. Volgens Newton is de versnelling gelijk aan de kracht per volume-eenheid. Deze krachtdichtheid wordt gegeven door drukverschillen en visceuze krachten.

De term

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

is de gradient van de druk $p$. We gebruiken steeds de gradient operator met alleen de afgeleiden naar de plaatsvariabelen $x_1$, $x_2$ en $x_3$. De druk is een scalaire grootheid (geen vector) die afhangt van plaats en tijd, van $x$ en $t$. Bekijken we een volume-elementje dat aan de *linker*kant onder lagere druk staat dan aan de *rechter*kant, dan ondervindt dit elementje een kracht naar links. Een analoge beschouwingen geldt voor *achter en voor*, en voor *onder en boven* : als de *druk toeneemt* in een bepaalde richting dan *werkt de kracht*(dichtheid) in dat punt *de andere kant op*. De gradient van $p$, $\nabla p$, is een vector die deze richting en de grootte van de drukverandering beschrijft. Vandaar dat $\nabla p$ in de eerste van de twee Navier-Stokes vergelijkingen staat, en wel aan de linker kant.

Aan de rechterkant staat

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2},$$

weer een vector, bestaande uit de som van de pure (niet gemengde) tweede orde partiële afgeleiden van $v$ naar $x_1$, $x_2$, $x_3$. De Laplaciaan

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

is een differentiaal-operator die in elke dimensie $N$ gedefinieerd kan worden worden. In dimensie $N = 1$, waar $x$ gewoon $x$ is, is de Laplaciaan van een functie $f(x)$ niets anders dan de tweede afgeleide $f''(x)$ van die functie. Is $f''(x)$ positief in een punt $x = a$, dan is $f(x)$ gemiddeld in de buurt van $x = a$ groter dan $f(a)$. Op dezelfde manier geldt dat als de Laplaciaan van de eerste component van $v$, i.e.

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2},$$

*positief* is in een punt, dat in de buurt van dat punt de snelheid in de $x_1$-richting gemiddeld *groter* is, en als gevolg van de viscositeit van water, het punt meegetrokken wordt in die richting. Dit geldt voor alle richtingen, ook voor de $x_2$-richting en $x_3$-richting, en verklaart, enigzins heuristisch in deze uitleg, de term in het rechterlid van

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v}_{\text{versnelling}} + \underbrace{\nabla p}_{\text{drukverschillen}} = \underbrace{\mu \Delta v}_{\text{visceuze krachten}}.$$

Hier $\mu$ een parameter is die aangeeft hoe groot dit meetrek effect is.

## 1.4 Niet-samendrukbaar

In de tweede Navier-Stokesvergelijking is

$$\nabla \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

de *divergentie* van $v$. Als de eerste component $v_1$ in de $x_1$-richting toe- dan wel afneemt, dan wordt, stroomafwaarts, de vloeistof uit elkaar getrokken dan wel samengedrukt. Hetzelfde geldt voor de $x_2$-richting en $x_3$-richting. De mate waarin dit gebeurt wordt gekwantificeerd door

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

maar omdat water *niet samendrukbaar* en ook niet *uitrekbaar* is, moeten deze drie elkaar compenseren, m.a.w. optellen tot nul:

$$\nabla \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0}_{\text{niet samendrukbaar}}\,.$$

# 2 Een karikatuur

De Navier-Stokes vergelijkingen zijn formules die op de een of ander manier de werkelijkheid (stromend water) representeren. De wetenschapssocioloog Bruno Latour verzamelt formules en grafieken zonder verder onderscheid onder de term *inscripties*, 2-dimensionale representaties van de 3-dimensionale chaotische werkelijkheid, zie bijvoorbeeld de oratie van Koeno Gravemeijer. Soms zijn daarvoor zelfs cascades van inscripties nodig. De dimensies van Latour zijn waarschijnlijk andere dimensies dan waar we het hieronder over zullen hebben, maar het is leuk om de vergelijkingen ook eens als inscripties te behandelen. Of we nu wel of niet weten wat de Navier-Stokes vergelijkingen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = \mu \Delta v, \quad \nabla \cdot v = 0$$

zeggen, we kunnen proberen deze vergelijkingen puur als inscriptie te versimpelen, al is het alleen maar om in eerste instantie de cascades te vermijden. Ik gooi hiertoe de tweede vergelijking en $p$ weg, schrap de $\nabla$'s en de $\Delta$, maak de $\partial$'s recht, en zet een enkele min terug. Dit geeft, met alleen de afgeleide aan de linkerkant,

$$v'(t) = \frac{dv}{dt} = -\mu v + v^2.$$

Dit type gewone differentiaalvergelijking komt in vele gedaanten terug in de nieuwe dynamisch modelleren modules voor Wiskunde D en NLT, met $v(t)$ als scalaire onbekende functie van de tijd, en $\mu$ als parameter, hier ook maar positief genomen. Merk op dat als we $t$ en $v$ schalen, $\mu$ meeschaalt. Het is een kleine oefening om $\mu$ naar $\mu = 1$ te schalen. Dit kan ook bij de Navier-Stokes vergelijkingen, naar vertroebelt de rol van de visceuze krachten. Als we de vergelijking kunnen oplossen met $\mu = 1$, dan kunnen we dat ook voor alle andere $\mu > 0$. Zie

`http://www.math.vu.nl/~jhulshof/echtebrrrwiskunde.pdf`

waar ook uitgelegd wordt dat voor het beantwoorden van vragen over het gedrag van de oplossing als functie van $t$, beter de differentiaalvergelijking zelf (en niet de oplossingsformule, die meestal toch niet bestaat) gebruikt kan worden. Want de grafiek van het rechterlid van de differentiaalvergelijking, $-\mu v + v^2$ verticaal tegen $v$ horizontaal vertelt alles. Kleine oplossingen ($0 < v(t) < \mu$) gaan naar nul als $t \to \infty$, maar oplossingen met $v(t) > \mu$ blazen op, in eindige tijd zelf, want

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{v(t)} = -\frac{v'(t)}{v(t)^2} \approx -1.$$

Natuurlijk stellen we ons wel de vraag of we de differentiaalvergelijking exact kunnen oplossen. Het antwoord is ja. Om meerdere redenen. Bijvoorbeeld omdat de substitutie

$$v(t) = \frac{1}{w(t)}$$

tot een eenvoudige lineaire inhomogene vergelijking voor $w(t)$ leidt, een transformatie die wonderwel ook werkt om de omgekeerde straal van de baan van Mars als functie van de draaihoek te vinden, en zo de bekende ellipsformules in poolcoordinaten te vinden, zie

`http://www.math.vu.nl/~jhulshof/nawdec270.pdf`

Voor Newton's mooie oplossingen van planeetbanen is dimensie $N = 3$ speciaal. Alleen voor $N = 3$ lijkt het probleem, achteraf gezien, op een voorgekookte tentamensom. Met andere $N$ werkt het niet. Bij Navier-Stokes is helaas juist $N = 2$ bijzonder.

# 3 Eigenschappen van oplossingen

We zullen praten over oplossingen alsof die oplossingen evident bestaan. Dat bestaan is, wiskundig gezien, verre van duidelijk. Wiskundigen *maken* oplossingen over het algemeen als limieten van *benaderende* oplossingen waarvan het bestaan wel duidelijk is, bijvoorbeeld (maar niet perse) numerieke oplossingen. Soms bestaan die limieten pas als je oplossingen die niet doen wat je wilt weggooit, alsof het *mislukte* (jaja) experimenten betreft waarvan je de uitkomst maar liever niet wil zien. Dit proces van *cheating* komt overeen met wat wiskundigen verstaan onder het maken van een convergente deelrij, ontstaan na weggooien van voldoende termen uit de rij van (hopelijk) benaderingen. Natuurlijk is dan niet meer duidelijk dat als het ene benaderende proces zich goed gedraagt (convergeert naar een limiet die een oplossing is), een *ander* zich goed gedragend proces *dezelfde* oplossing definieert. Alles wat hieronder gebeurt negeert dit aspect van het probleem, maar concentreert zich wel op de vraag:

**Zijn oplossingen uniek bepaald door hun beginwaarden?**

We rekenen hiertoe met oplossingen alsof alles mag, maar mogen niet vergeten dat alle *is gelijk tekens* alleen via de benaderende oplossingen bewezen kunnen worden, en niet eens altijd, want soms lukt het alleen een *kleiner gelijk* teken te bewijzen waar je een *gelijk teken* zou verwachten. Het onderstaande is daarom wiskundig gezien niet meer dan een aanzet, maar wel de juiste aanzet om te begrijpen waarom er een prijs uitgeloofd is om bovenstaande vraag precies te stellen (hetgeen ik hier niet doe) en te beantwoorden.

Wat ik beschrijf is gebaseerd op het boekje Navier-Stokes Equations van Peter Constantin en Ciprian Foias. De laatste heeft begin dit millennium op de VU een eredoctoraat gekregen en op de VU een serie voordrachten gegeven over de recentere ontwikkelingen rond Navier-Stokes.

## 3.1 Partieel integreren en kinetische energie

We nemen aan dat we over oplossingen kunnen praten, en rekenen daarmee zonder ons hier al te veel af te vragen of de manipulaties gerechtvaardigd zijn. Nemen we in de eerste van de twee Navier-Stokes vergelijkingen het inwendig product met $v$ dan krijgen we

$$v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot (v \cdot \nabla)v + v \cdot \nabla p = \mu v \cdot \Delta v,$$

en dit kunnen we integreren over het stroomdomein, de kubus $K$. We gebruiken de notatie

$$\int_K \ldots = \int_K \ldots dx = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \ldots dx_1 dx_2 dx_3,$$

waarbij de integratie*volgorde* niet uitmaakt, dus

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \ldots dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \ldots dx_1 dx_3 dx_2 = \ldots$$

We behandelen de termen apart. De eerste term in

$$\underbrace{v \cdot \frac{\partial v}{\partial t}}_{eerste\,term} + v \cdot (v \cdot \nabla)v + v \cdot \nabla p = \mu v \cdot \Delta v,$$

is

$$v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{v_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}_{kettingregel} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} v^2,$$

zodat

$$\int_K v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{\int_K \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} v^2 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_K v^2}_{integraal\, en\, afgeleide\, verwisseld} = E'(t),$$

waarbij

$$E = E(t) = \frac{1}{2} \int_K v^2$$

de totale hoeveelheid kinetische energie is op tijdstip $t$.

De krachten tengevolge van drukverschillen hebben geen invloed op $E(t)$, want de derde term in

$$v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{v \cdot (v \cdot \nabla) v}_{tweede\, term} + \underbrace{v \cdot \nabla p}_{derde\, term} = \mu v \cdot \Delta v,$$

levert na integratie over $K$

$$\int_K v \cdot \nabla p =$$

$$\underbrace{\int_K v_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \int_K v_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} + \int_K v_3 \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\int_K p \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \int_K p \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \int_K p \frac{\partial v_3}{\partial x_3}}_{partieel\, integreren\, naar\, x_1, x_2, x_3}$$

$$= -\int_K p \nabla \cdot v = 0,$$

vanwege $\nabla \cdot v = 0$. In feite kan $p$ uit het hele probleem weggewerkt worden via de Helmholtz decompositie van vectorvelden, maar dat is voor de presentatie nu niet nodig.

Ook de tweede term geeft geen bijdrage want, met de somnotatie,

$$\int_K v \cdot (v \cdot \nabla) v = \underbrace{\int_K \sum_{i,j=1}^{3} v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\int_K \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} v_i}_{partieel\, integreren\, naar\, x_j}$$

$$= -\int_K \sum_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j v_i - \underbrace{\int_K \sum_{i,j=1}^{3} v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} v_i}_{is\, nul\, vanwege\, \nabla \cdot v = 0} = -\int_K v \cdot (v \cdot \nabla) v,$$

(min de term waarmee we begonnen) en dus concluderen we dat

$$\int_K v \cdot (v \cdot \nabla) v = 0,$$

zodat overblijft

$$E'(t) = \mu \int_K v \cdot \Delta v = \mu \int_K \sum_{i=1}^{3} v_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} = \underbrace{\mu \int_K \sum_{i,j=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} = -\mu \int_K \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{partieel\, integreren\, naar\, x_j}$$

$$= \underbrace{-\mu \int_K \sum_{i,j=1}^{3} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 = -\mu \int_K \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}_{notatie} = -\mu \mathcal{E}(t),$$

waarin $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ de som is van de kwadraten van alles eerste orde partiële afgeleiden van de componenten van $v$, en

$$\mathcal{E} = \int_K \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2,$$

een grootheid is die we nog zullen terugzien.

Alleen de eerste term en het rechterlid in

$$\underbrace{v \cdot \frac{\partial v}{\partial t}}_{eerste\, term} + v \cdot (v \cdot \nabla) v + v \cdot \nabla p = \underbrace{\mu v \cdot \Delta v}_{rechterlid}$$

hebben dus een bijdrage in de formule

$$E'(t) = -\mu \mathcal{E}(t),$$

die zegt dat de kinetische energie afneemt en impliceert dat

$$\int_0^T \int_K \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dt = \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq \frac{E(0)}{\mu}$$

voor elke $T > 0$. Anders gezegd, de wrijving (viscositeit) zorgt ervoor dat $\mathcal{E}(t)$ integreerbaar is: de integraal $\int_0^T \mathcal{E}(t)dt$ is begrensd als functie van $T$.

## 3.2 Uniciteit?

Stel dat we twee oplossingen hebben, dus naast $v$ en $p$ die voldoen aan

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = \mu \Delta v, \quad \nabla \cdot v = 0,$$

ook $u$ en $q$ die voldoen aan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = \mu \Delta v, \quad \nabla \cdot u = 0,$$

met $u$ en $v$ op $t = 0$ hetzelfde. De vraag is dan of $w = u - v$ gelijk blijft aan nul. Trekken we de vergelijkingen van elkaar af dan volgt

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \underbrace{(u \cdot \nabla)u - (v \cdot \nabla)v}_{(u\cdot\nabla)w+(w\cdot\nabla)v} + \nabla(p - q) = \mu\Delta w, \quad \nabla \cdot w = 0,$$

waarbij de niet-lineaire termen zoals aangegeven herschreven kunnen worden, door de tweede $u$ in $w$ te veranderen en in de volgende term de fout goed te maken. Vervolgens werkt het argument boven voor $\int_K v \cdot (v \cdot \nabla)v = 0$ ook om te concluderen dat $\int_K w \cdot (u \cdot \nabla)w = 0$. Inwendig product nemen met $w$ en integreren geeft dan dat

$$\underbrace{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_K w^2}_{\Phi'(t)} + \mu \int_K \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = -\int_K w \cdot (w \cdot \nabla)v,$$

waarmee we willen bewijzen dat

$$\Phi = \int_K w^2$$

de eigenschap heeft dat $\Phi(t) = 0$ als dat op $t = 0$ het geval is. In dat geval volgt namelijk dat voor elke $t$ de niet-negatieve integrand $w^2 = (u - v)^2$ tot nul integreert over $K$, zodat $u$ en $v$ samenvallen.

We zoeken hiertoe een *differentiaalongelijkheid* van de vorm

$$\Phi'(t) \leq \Phi(t)f(t),$$

met $f(t)$ zó dat $f(t)$ een primitieve functie $F(t)$ heeft met $F(0) = 0$. Dan volgt immers dat

$$\Phi(t) \leq \Phi(0)\exp(F(t)),$$

hetgeen impliceert dat $\Phi(t) = 0$ als dat op $t = 0$ het geval is. Dat de ongelijkheid voor $\Phi(t)$ volgt uit de ongelijkheid voor $\Phi'(t)$ moet natuurlijk wel bewezen worden maar het bewijs is nauw verwant aan de afleiding van de oplossingsformule $\Phi(t) = \Phi(0)\exp(F(t))$ voor de *differentiaalvergelijking* $\Phi'(t) = \Phi(t)f(t)$.

Op zoek naar de differentiaalongelijkheid voor $\Phi(t)$ gaan we dus uit van

$$\underbrace{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_K w^2}_{\Phi'(t)} + \underbrace{\mu \int_K \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\textit{deze term helpt}} = -\int_K w \cdot (w \cdot \nabla)v,$$

waarin de tweede term links positief is en dus helpt om het rechterlid en daarmee $\Phi'(t)$ onder controle te krijgen. Voor het rechterlid volgt, herhaaldelijk gebruikend dat het inwendig product van twee vectoren niet groter kan zijn dan het product van de lengten,

$$-\int_K w\cdot(w\cdot\nabla)v \le \int_K |w\cdot(w\cdot\nabla)v| \le \int_K |w|\,|(w\cdot\nabla)v| \le \int_K |w|\,|w|\,\underbrace{|\frac{\partial v}{\partial x}|}_{\sqrt{(\frac{\partial v}{\partial x})^2}}$$

$$= \int_K w^2\,|\frac{\partial v}{\partial x}| \le \sqrt{\int_K w^4}\sqrt{\int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2}.$$

Voor de laatste ongelijkheid hebben we de Cauchy-Schwarz ongelijkheid

$$\int_K (fg) \le \sqrt{\int_K f^2}\sqrt{\int_K g^2}$$

gebruikt, de integraalversie van de ongelijkheid

$$a_1b_1 + a_2b_2 \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}.$$

Resultaat van al deze exercities is dat

$$\frac{1}{2}\underbrace{\frac{d}{dt}\int_K w^2}_{\Phi'(t)} + \mu\int_K\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \le \int_K w^2\,|\frac{\partial v}{\partial x}| \le \underbrace{\sqrt{\int_K w^4}\sqrt{\int_K(\frac{\partial v}{\partial x})^2}}_{???},$$

waarin we rechts nu voor het eerst de exponent 4 zien. Wat kunnen we hiermee?

## 3.3 In twee dimensies gaat het goed

In dimensie $N = 2$, waarvoor we het hele verhaal tot nu toe kunnen overschrijven met $x = (x_1, x_2)$, $v = \binom{v_1}{v_2}$, etc, geldt de volgende Ladyženskaja ongelijkheid

$$\int_K w^4 \le C\int_K(\frac{\partial w}{\partial x})^2\int_K w^2,$$

met $C$ een constante (een getal) die expliciet bepaald kan worden, en die onafhankelijk is van $v$ en van het domein $K$. Als $v$ maar nul is op de rand en de integralen rechts eindig zijn.

Met de Ladyženskaja ongelijkheid krijgen we

$$\frac{1}{2}\underbrace{\frac{d}{dt}\int_K w^2}_{\Phi'(t)} + \underbrace{\mu\int_K\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{a\,good\,guy} \le \underbrace{\sqrt{C}\sqrt{\int_K(\frac{\partial w}{\partial x})^2}}_{a}\ \underbrace{\sqrt{\int_K w^2}\sqrt{\int_K(\frac{\partial v}{\partial x})^2}}_{b}$$

$$\leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \underbrace{\frac{1}{2}C\int_K (\frac{\partial w}{\partial x})^2}_{a\,bad\,guy} + \frac{1}{2}\int_K w^2 \int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2$$

*Als* the good guy en the bad guy tegen elkaar weg zouden vallen, dan blijft uiteindelijk over dat

$$\frac{1}{2}\underbrace{\frac{d}{dt}\int_K w^2}_{\Phi'} \leq \frac{1}{2}\underbrace{\int_K w^2}_{\Phi}\ \underbrace{\int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2}_{f=\mathcal{E}},$$

en zijn we klaar want $f = \int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2 = \mathcal{E}$ is integreerbaar. De gewenste differentiaalongelijkheid voor $\Phi'(t)$ met $f(t)$ is nu immers gevonden. Als the two guys niet wegvallen dan gebruiken we een *geschaalde* versie van de ongelijkheid van Young,

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2,$$

en kiezen $\varepsilon$ zó dat $\mu = \frac{\varepsilon}{2}C$ en ze alsnog wegvallen. Dit geeft dezelfde ongelijkheid met een extra factor die voor het argument verder niet uitmaakt.

## 3.4 Waarom gaat het goed in twee dimensies?

De reden dat het goed gaat in dimensie twee is dat de Ladyženskaja ongelijkheid

$$\int_K w^4 \leq C\int_K (\frac{\partial w}{\partial x})^2 \int_K w^2$$

geldt, met zelfs een $C$ die niet van het gebied afhangt. Het gaat te ver om deze $C$ hier te berekenen en de afschatting te bewijzen, maar het is wel makkelijk in te zien dat de exponenten in deze ongelijkheid wel moeten veranderen als we naar dimensie $N = 3$ gaan. Bijvoorbeeld door de infinitesimalen te tellen. In dimensie $N = 2$ staat $\int_K$ voor

$$\int_K = \int_K \ldots dx_1 dx_2.$$

Schalen we de plaatsvariabelen met $x = \lambda\xi$, en schrijven we om naar de nieuwe plaatsvariabelen $\xi_1$ en $\xi_2$, dan wordt

$$dx_1 = \lambda d\xi_1, \quad dx_2 = \lambda d\xi_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \xi_2}.$$

In de linkerkant van de Ladyženskaja ongelijkheid krijgen we 2 factoren $\lambda$, en rechts $2 - 2 + 2$ factoren $\lambda$, omdat ook de afgeleiden meedoen. Evenveel aan beide kanten, en dat moet wel, wil $C$ niet van het domein afhangen. Merk op dat $w$ zelf aan beide kanten met (dezelfde) orde 4 voorkomt. Ook die orde moet links en rechts hetzelfde zijn, en dat geldt zelfs voor schattingen waarin $C$ wel van het gebied mag afhangen. Ter illustratie, er geldt bijvoorbeeld wel een ongelijkheid van de vorm

$$\int_K w^2 \leq C_K \sqrt{\int_K w^4},$$

maar daarin wordt $C_K$ slechter (groter) met grotere $K$.

Dat een bewijstechniek faalt omdat de exponenten niet goed passen, is natuurlijk niet een bewijs dat de te bewijzen uitspraak niet waar is, maar in veel eenvoudigere en met meerdere technieken aan te pakken problemen, zoals het vinden van een positieve oplossing (die voldoet aan $u = 0$ op de rand) van $\Delta u + u^p$ op een bol in $\mathbb{R}^N$, blijkt dat het wel of niet bestaan gedicteerd wordt door de zogenaamde kritieke Sobolev schattingen, die van hetzelfde type zijn als de Ladyženskaja ongelijkheid.

## 3.5 Wat kan er nog wel in drie dimensies?

In dimensie drie geldt een andere Ladyženskaja ongelijkheid, namelijk

$$\int_K w^4 \leq C(\int_K (\frac{\partial w}{\partial x})^2)^{\frac{3}{2}} (\int_K w^2)^{\frac{1}{2}}$$

met een $C$ die ook niet van het gebied afhangt. De exponent $\frac{3}{2}$ zorgt dat de bijdrage van de partials in de schalingsboekhouding hetzelfde is als bij de ongelijkheid in dimensie twee, en door de exponenten samen nog steeds gelijk aan 2 te nemen gaat de schaling weer goed. Maar in het vervolg wordt het slechter, want om the good and the bad guy te balanceren hebben we nu de Young ongelijkheid

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

nodig, die geldt voor

$$a, b \geq 0, \quad p, q \geq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

waarbij we met $p = \frac{4}{3}$ en $q = \frac{1}{4}$ krijgen dat

$$\underbrace{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_K w^2}_{\Phi'(t)} + \underbrace{\mu \int_K \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{the\,same\,good\,guy} \leq \underbrace{\sqrt{C}\,\left(\int_K (\frac{\partial w}{\partial x})^2\right)^{\frac{3}{4}}}_{a} \underbrace{\left(\int_K w^2\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2}}_{b}$$

$$\leq \frac{3}{4}a^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}b^4 = \underbrace{\frac{3}{4}C^{\frac{2}{3}}\int_K (\frac{\partial w}{\partial x})^2}_{the\,same\,bad\,guy} + \frac{1}{4}\int_K w^2 \underbrace{\left(\int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2\right)^2}_{nu\,met\,exponent\,2},$$

zodat uiteindelijk

$$\Phi' \leq \Phi\mathcal{E}^2,$$

We weten echter niet of $\int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2 = \mathcal{E}$ kwadratisch integreerbaar is. Maar *als* dit het geval is, dan is elke andere oplossing met hetzelfde beginsnelheidsveld gelijk aan $v$. Met andere woorden, de vraag over uniciteit van oplossingen schuift door naar de vraag over regulariteit van oplossingen, waarbij de vraag over hoe goed

$$\mathcal{E} = \int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2$$

zich gedraagt centraal staat. Hiermee komen we weer terug bij de natuurkunde.

## 3.6 Regulariteit

Maar eerst de (laatste) schatting. Nemen we in de eerste van de twee Navier-Stokes vergelijkingen het inwendig product met $-\Delta v$ dan krijgen we

$$-\Delta v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \cdot (v \cdot \nabla)v - \Delta v \cdot \nabla p = -\mu \Delta v \cdot \Delta v,$$

en dit kunnen we weer integreren over het stroomdomein, de kubus $K$. De eerste term geeft

$$-\int_K \Delta v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{-\int_K \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\frac{\partial v_i}{\partial t} = \int_K \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial t}}_{partieel\,integreren}$$

$$= \underbrace{\int_K \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial v}{\partial x})^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2}_{integraal\,en\,afgeleide\,verwisseld} = \frac{1}{2}\mathcal{E}'(t).$$

De integraal van de derde term met $p$ valt weer weg, hoewel het nu met de stoktermen een wat lastiger verhaal is dat ik onder het kleed veeg. De integraal van de tweede term valt niet weg en brengen we naar rechts. De integraal van het rechterlid is negatief en brengen we naar links. Dit geeft

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}'(t) + \underbrace{\mu \int_K (\Delta v)^2}_{a\,good\,guy} = \underbrace{\int_K \Delta v \cdot (v \cdot \nabla)v}_{rechterlid}$$

The good guy bevat de integralen van de kwadraten van de Laplacianen van $v_1$, $v_2$ en $v_3$, maar het lukt niet goed om deze term het rechterlid te laten controleren. Wel lukt het, met het nodige extra werk, een schatting van de vorm

$$\mathcal{E}' \leq -C_1\mathcal{E} + C_2\mathcal{E}^3$$

te bewerkstelligen, zodat voor oplossingen met kleine beginwaarden van $\mathcal{E}$ alles nog goed gaat, waarbij de analogie met de eerder besproken karikatuur in het oog springt, alleen staat er nu een derde macht. Omdat er echter een ongelijkheid staat is het niet gezegd dat oplossingen waarvoor $\mathcal{E}$ groter is dan $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ ook daadwerkelijk opblazen (als je ze meet met de $\mathcal{E}$-norm althans, in de $E$-norm blijven ze sowieso begrensd).

## 3.7 Niet-equivalente Pythagoras-normen

We hebben gezien dat de grootheden

$$E = \int_K v^2 \quad \text{en} \quad \mathcal{E} = \int_K \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

zich verschillend manifesteren in de behandeling van de Navier-Stokes vergelijkingen. De eerste, $E$, ontstaat door de componenten van $v$ te kwadrateren, op te tellen, en te integreren over alle $x$ in het domein. Omdat integralen toch eigenlijk een soort continue sommen zijn, is het niet ongepast om de wortel van $E$ als een soort Pythagoras-norm voor $v$ te zien. Dat doen we ook in de theorie van Fourierreeksen voor functies die nul zijn op de rand van een gegeven interval (denk aan de beschrijving van een gitaarsnaar), als we die functies schrijven als combinaties van sinussen die passen op het interval (en horen bij eigenfrequenties van de snaar), zeg met lengte $\pi$. De functies $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, ... vormen een basis voor algemene profielen en we kunnen voor elke functie switchen tussen een beschrijving als functie en een beschrijving met coordinaten t.o.v. van de basisfuncties. De *Pythagoras normen* komen daarbij met elkaar overeen: de som van de kwadraten van de coordinaten (de Fourier-coefficienten) correspondeert met de integraal van het kwadraat van de functie, hetgeen leidt tot identiteiten als

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(zoek de functie), die ik als lokkertje in de abstract had gezet.

Ook in de Navier-Stokes context kan de beschrijving van (snelheids-) vectorvelden vertaald worden in termen van coordinaten t.o.v. een basis van *eigenvectorvelden* bij *eigenwaarden* van de aan de Navier-Stokes vergelijkingen gerelateerde Stokes operator, waarvoor ik naar de literatuur verwijs. Die beschrijving wordt gebruikt om oplossingen te construeren via benaderingen met eindige sommen van die eigenvectorvelden (steeds meer coordinaten dus), hetgeen hier verder achterwege blijft, maar waarbij beide grootheden $E$ en $\mathcal{E}$ gebruikt worden om convergentie naar een limietoplossing te bewijzen.

We hebben hierboven echter gezien dat de bijbehorende normen zich anders manifesteren. Ze zijn niet equivalent. De energieschatting zegt dat $E$ daalt, maar hoe hard hangt af van $\mathcal{E}$, terwijl we $\mathcal{E}$ nauwelijks onder controle krijgen. Het is volledig denkbaar, maar nooit waargenomen, dat voor een oplossing de grafiek van $\mathcal{E}(t)$, uitgezet tegen horizontaal $t$, een verticale asymptoot heeft bij een zekere $t = T$. Of dit gebeurt, en wat daarna gebeurt, en hoe het verloop is als $t \to T$, fascineert zowel wiskundigen als natuurkundigen die ieder op hun eigen manier de blokkade die ik hierboven geschetst heb proberen te omzeilen. Turbulentie en cascades (niet die van Latour maar wel die van Kolmogorov) van overgangen naar steeds fijnere schalen, zie ook het werk van Ruelle en Takens, zijn de hot topics waar het omdraait. Niet alleen vanwege de opdracht aan de spreker blijven ze hier achterwege.

# 4 Rotatie en enstrophie

Terug naar de natuurkunde, wat is de betekenis van

$$\int_K (\frac{\partial v}{\partial x})^2 = \mathcal{E}?$$

Wel, er is een grootheid die ik tot nu toe, volledig ten onrechte, achterwege heb gelaten, namelijk de *vorticity*

$$\Omega = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix},$$

de rotatie van $v$. In een vlak loodrecht op deze vector $\Omega$ draait de vloeistof rond. Hoe groter $\Omega$, hoe harder het ronddraaien. Het is een leuke opgave om na te gaan dat

$$\int_K \Omega^2 = \int_K (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2) =$$

$$\int_K \left( (\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3})^2 + (\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2})^2 \right)$$

gelijk is, na partieel integreren (*de belangrijkste truc in calculus en analyse*) van de dubbel product termen, aan

$$\mathcal{E} = \int (\frac{\partial v}{\partial x})^2 = \int_K \sum_{i,j=1}^{3} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 .$$

Kortom

$$\int_K \Omega^2 = \int (\frac{\partial v}{\partial x})^2 = \mathcal{E},$$

de term die we niet onder controle hebben is het kwadraat van de Pythagoras-norm van de *vorticity*, ook wel de enstrophie genoemd. Hoe turbulenter de stroming hoe groter deze norm. Deze norm is niet onder controle, en of de stroming spontaan turbulent kan worden is onbekend.