

Waarom functies met complexe getallen?

Joost Hulshof

Een essentieel onderdeel van iedere studie wiskunde of natuurkunde is het leren werken met en begrijpen van de basistechnieken voor complexe functies, waarbij we werken in de complexe getallenverzameling \mathbb{C} , die we met het platte vlak \mathbb{R}^2 identificeren via

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \leftrightarrow \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

De x -as in dit complexe vlak komt overeen met \mathbb{R} en wordt daarom de *reële* as genoemd. **De basisbegrippen van complexe getallen, waaronder het complexe vlak, worden in dit verhaal bekend verondersteld.**

Een alternatieve naam voor dit onderdeel van de studie kan zijn: **integraalrekening zonder primitiveren met behulp van differentiaalrekening voor complexe functies**. We maken gebruik van het feit dat veel vertrouwde functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ook te zien zijn als¹ complex differentieerbare functies² $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Complex differentieerbaar in z_0 betekent per definitie dat

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ bestaat.}$$

De beginselen van complexe differentiaalrekening betreffen de vraag hoe je aan de partiële afgeleiden naar x en naar y van het reële en imaginaire deel van $f(z)$ kunt zien of $f'(z_0)$ bestaat, en ook hoe je er mee werkt en rekent alsof het niet uitmaakt dat er een z in plaats van een x staat.

Als f complex differentieerbaar is in een omgeving van z_0 , dan heet z_0 een *regulier punt* van f en f *analytisch* in z_0 . We noemen z_0 een (eventueel ophefbaar³) singulariteit van f als er willekeurig dichtbij z_0 reguliere punten van f liggen. Als z_0 geen regulier punt is van f en ook geen singulariteit van f , dan is z_0 dus helemaal niets van f en verder niet relevant als we het over f hebben⁴.

Als f complex differentieerbaar is in een omgeving van z_0 *behalve* in z_0 zelf, dan heet z_0 een *geïsoleerde singulariteit* van f . Het zijn juist deze geïsoleerde singulariteiten die de interessante informatie bevatten, de punten⁵ waar we, zonder dat er met $f(z)$ gekke dingen gebeuren, *z wel omheen maar niet doorheen* kunnen laten lopen, meestal omdat we dan zouden delen door nul. **Als we zeggen dat z_0 een regulier punt of een geïsoleerde singulariteit is van f , dan zeggen we impliciet dat f , behalve eventueel in z_0 zelf, in de buurt van z_0 gedefinieerd en complex differentieerbaar is!**

¹Zonder verdere keuzevrijheid, ze maken zichzelf als het ware.

²Niet altijd op heel \mathbb{C} , maar wel op een substantieel deel van \mathbb{C} .

³Flauw voorbeeld: $z = 0$ is ophefbaar voor $f(z) = \frac{z}{z}$.

⁴Een punt is regulier, singulier of niks.

⁵Andere singulariteiten komen ook aan de orde.

Bij

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

zijn alle punten $z \in \mathbb{C}$ regulier behalve de punten $z = -i$ en $z = i$, de geïsoleerde singulariteiten van f . Deze functie kunnen we in de buurt van $z = i$ herschrijven⁶ als

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+i)(z-i)} &= \frac{1}{z+i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{2i + (z-i)} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} \frac{1}{z-i} = \\ &= \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{z-i}{2i} + \left(\frac{z-i}{2i}\right)^2 - \left(\frac{z-i}{2i}\right)^3 + \dots \right) \frac{1}{z-i} \\ &= -\frac{i}{2} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z-i) + \frac{1}{16}(z-i)^2 + \dots, \end{aligned}$$

waarbij we in de vierde stap een meetkundige reeks⁷ hebben gebruikt. We zullen zien dat **in de buurt⁸ van een geïsoleerde singulariteit $z = z_0$ altijd geldt dat⁹**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (\text{F1})$$

en dat we met deze som in feite mogen rekenen alsof het een gewone eindige som betreft¹⁰. We zullen heel vaak alleen a_{-1} hoeven uit te rekenen omdat deze coëfficiënt¹¹ de relevante informatie voor het integreren bevat.

Soms blijkt dat alle negatieve machten als coëfficiënt $a_n = 0$ hebben¹². Dan heet de (geïsoleerde) singulariteit *ophefbaar*¹³. Ook als z_0 een regulier punt is dan is, in de buurt van z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (\text{F2})$$

Als oneindig veel negatieve machten in (F1) een coëfficiënt a_n ongelijk aan 0 hebben, dan heet de singulariteit *essentieel* en is het gedrag van f in de buurt van z_0 met geen pen te beschrijven. Zijn echter in een niet-ophefbare singulariteit slechts eindig veel coëfficiënten van negatieve machten ongelijk nul¹⁴, dan kun je de grootste negatieve macht¹⁵ naar buiten halen, waarna een tamelijk onschuldige machtreeks overblijft die begint met een constante ongelijk nul. In het voorbeeld:

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z-i} \left(-\frac{i}{2} + \frac{1}{4}(z-i) + \frac{i}{8}(z-i)^2 + \frac{1}{16}(z-i)^3 + \dots \right),$$

⁶Reken mee.

⁷Met welke rede?

⁸i.e. voor $0 < |z - z_0| < R$ en zekere $R > 0$.

⁹Dit heet een Laurentreeks.

¹⁰Term voor term differentiëren en integreren bijvoorbeeld.

¹¹Het residu van $f(z)$ in $z = z_0$.

¹²Dan spreken we van een *Taylorreeks*.

¹³Flauw voorbeeld: $z = 0$ is ophefbaar voor $f(z) = \frac{z}{z}$.

¹⁴Zo'n singulariteit heet een pool.

¹⁵i.e. $(z - z_0)^n$ als n de eerste n is met $a_n \neq 0$, kun je ook doen als z_0 ophefbaar is.

geldig voor $0 < |z - i| < 1$.

Alle functies die we maken met quotiënten van polynomen¹⁶ hebben alleen reguliere punten en geïsoleerde singulariteiten¹⁷, eindig veel slechts¹⁸. Soms heeft zo'n functie in zijn reële vorm een primitieve functie¹⁹ ²⁰. Voor ons voorbeeld,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ met primitieve functie } F(x) = \arctan x,$$

volgt, met de hoofdstellingen van de integraalrekening, dat

$$\int_a^b \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \arctan b - \arctan a.$$

Deze gewone reële integraal, waarin x van $a \in \mathbb{R}$ naar $b \in \mathbb{R}$ loopt over de reële as, is gelijk aan het verschil van de arctangenswaarden in het eindpunt en het beginpunt. In het limietgeval $a = -\infty$ en $b = \infty$ vinden we ook de *oneigenlijke integraal*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi, \quad (\text{F3})$$

de *eindige oppervlakte* van het *onbegrensde gebied* ingeklemd tussen de *grafiek*

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

en de x -as in het (x, y) -vlak²¹.

In de uitkomst π is de primitieve functie F volledig uit beeld verdwenen. Na alle frustraties bij calculus, waar we gemerkt hebben dat primitieve functies meestal niet voorhanden zijn, of slechts heel moeilijk te vinden, ligt de vraag voor de hand of (F3) ook zonder primitiveren kan worden bereikt. Merk ook op dat (F3) een speciaal geval is van de Fourier integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp} \frac{1}{x^2 + 1} dx, \quad (\text{F4})$$

waarin p de Fourier variabele is. Fourier transformaties zijn belangrijk, niet alleen in toepassingen, maar primitiveren is min of meer kansloos in (F4).

De complexe e -macht in (F4) is voorlopig alleen nog gedefinieerd voor puur imaginaire exponenten,

$$e^{it} = \exp(it) = \cos t + i \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{F5})$$

met als rechtvaardiging dat dit in $t = 0$ gelijk aan 1 is, en dat bij differentiëren naar t een factor i naar voren komt. Met (F5) draaien we de eenheidscirkel $|z| = 1$ in het complexe vlak rond. Algemener:

$$t \rightarrow z_o + \rho \exp(it) \text{ met } 0 \leq t < 2\pi \text{ parametrizeert de cirkel } C_{z_o, \rho} \text{ linksom.}$$

¹⁶De zogenaamde rationale functies

¹⁷Alleen polen

¹⁸Alle punten doen mee als we naar f kijken.

¹⁹Engels: anti-derivative.

²⁰Ook $f(x) = \frac{1}{x}$, met primitieve functie $F(x) = \ln|x|$, kijk echter uit bij $x = 0$.

²¹Dit is *niet* het (x, y) -vlak dat we voor de beschrijving van \mathbb{C} gebruiken!!

De nieuwe techniek in dit vak om zonder primitiveren integralen als (F3) uit te rekenen begint met de observatie dat we in \mathbb{C} op veel meer manieren van a naar b kunnen lopen. **Maakt het wat uit voor de integraal**

$$\int_a^b \frac{1}{z^2 + 1} dz,$$

als we z nu eens niet over de reële as van a naar b laten lopen? Bijvoorbeeld over een cirkelboog, aangenomen tenminste dat die boog niet door de *singulariteiten* $z = i$ en $z = -i$ gaat²². De definitie van de integraal over andere paden van a naar b ligt na vectorcalculus voor de hand als we zo'n cirkelboog beschrijven met een parametrisatie

$$t \rightarrow z(t) = x(t) + iy(t),$$

waarbij t een gewoon interval²³ doorloopt, zeg $[\alpha, \beta]$.

Voor iedere netjes geparametriseerde²⁴ boog²⁵ C luidt de definitie

$$\int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt, \quad (\text{F6})$$

met²⁶

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

In het bijzondere geval

$$a = \alpha, b = \beta, z(t) = t: \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx;$$

hebben we de gewone integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$ terug. Zijn beginpunt a en eindpunt b van C hetzelfde, dan heet C een gesloten kromme, en aangezien $\int_a^a f(x) dx$ altijd nul is, is de vraag hierboven dus ook: **is voor gesloten krommen C de lijnintegraal $\int_C f(z) dz$ nul?**

Als $f(z)$ de complexe afgeleide van een complex differentieerbare $F(z)$ is, dan volgt bijna net zo als bij calculus dat de integraal wordt uitgerekend als

$$\int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Voor de eenvoudige functies $z \rightarrow (z - z_0)^n$, met $n \geq 0$ geheel, is de integraal over een gesloten kromme zo altijd 0 als we eenmaal weten dat voor dit soort functies complex differentiëren²⁷ hetzelfde gaat als met reële functies $x \rightarrow (x - x_0)^n$. En ook voor negatieve machten gaat het goed, als we maar niet door $z = z_0$ lopen, en n ongelijk is aan -1 . Alleen voor $n = -1$ gaat het anders. Een linksom doorlopen cirkel $C_{z_0, \rho}$ met middelpunt z_0 en straal $\rho > 0$ geeft, met de parametrisatie²⁸ $z(t) = z_0 + \rho \exp(it)$, dat

$$\oint_{C_{z_0, \rho}} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho \exp(it)} i\rho \exp(it) dt = 2\pi i, \quad (\text{F7})$$

²²Waar $f(z)$ wegens delen door nul niet is gedefinieerd.

²³Niet persé $[a, b]$ zelf natuurlijk.

²⁴Net zo netjes als bij vectorcalculus.

²⁵Niet persé een cirkelboog, ook wel: kromme. In het boek: arc, contour.

²⁶Wat anders?

²⁷En dus ook complex primitiveren

²⁸Waarbij t loopt van 0 tot 2π .

wat $\rho > 0$ ook is. Schrijf zelf uit waarom

$$\oint_{C_{z_0, \rho}} (z - z_0)^n dz = 0 \text{ als } n \text{ geheel is en } n \neq -1.$$

Alle termen in het rechterlid van

$$\frac{1}{z^2 + 1} = -\frac{i}{2} \frac{1}{z - i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z - i) + \frac{1}{16}(z - i)^2 + \dots, \quad (\text{F8})$$

geven dus nul bij integratie over een cirkel $C_{i, \rho}$ met parametrisatie $z(t) = i + \rho \exp(it)$ rond $z = i$, behalve de term met $z - i$ in de noemer: die geeft $-\frac{i}{2}$ keer $2\pi i$. Voor $\rho < 1$ is (F8) geldig op $C_{i, \rho}$ en mogen²⁹ integraal en som worden verwisseld, zodat

$$\oint_{C_{i, \rho}} \frac{1}{z^2 + 1} dz = -\frac{i}{2} \oint_{C_{i, \rho}} \frac{1}{z - i} dz = -\frac{i}{2} 2\pi i = \pi.$$

Hierin is $-\frac{i}{2}$ het residu van de functie in $z = i$, zoals aangekondigd bij (F1). De uitspraak om te onthouden is de **residustelling: de integraal van $f(z)$ over een linksom doorlopen gesloten kromme is gelijk aan $2\pi i$ maal de som van de residuen in het binnengebied.**

We zullen dus ook zien dat de uitkomst niet verandert als we $C_{i, \rho}$ vervormen, zolang we maar wegblijven van $z = i$ en $z = -i$. Ook de integraal over de gesloten kromme die bestaat uit het lijnstuk van $z = -R$ naar $z = R$, gevolgd door de integraal over halve cirkelboog γ_R in het bovenhalfvlak terug naar $z = -R$, is gelijk aan π . In formules:

$$\int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \pi. \quad (\text{F9})$$

Let op de orientatie die hier gekozen wordt. We lopen met z over het reële lijnstuk³⁰ $[-R, R]$ van links naar rechts en dan bovenlangs in het complexe vlak linksom over de cirkel(boog) $|z| = R$ weer terug. De totale kromme wordt zo linksom doorlopen en heeft in zijn binnengebied alleen een singulariteit in $z = i$.

De eerste integraal in (F9) is, afgezien van de nog te nemen limiet $R \rightarrow \infty$, de integraal waar het om begonnen was. In de tweede integraal lopen we met z over een cirkelboog met (boog)lengte πR . De π doet er nu niet toe, het gaat om de ordegrootte R . Op de cirkelboog is de integrand, omdat de term z^2 in de noemer domineert, in absolute waarde van orde $1/R^2$, want op de boog is $|z| = R$. De tweede integraal ziet er dus uit als een term van orde $1/R$, waardoor de bijdrage in de limiet $R \rightarrow \infty$ verdwijnt. De manier om dit precies te maken is met de definitie van $\int_C f(z) dz$ in (F6) en

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t)) z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| |z'(t)| dt, \quad (\text{F10})$$

waarin de laatste term een integraal naar booglengte is, omdat

$$|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

²⁹Term voor term opereren zal gerechtvaardigd blijken.

³⁰Vandaar de x in de eerste integraal.

Men schrijft ook wel $|dz| = |z'(t)| dt$ en met deze notatie is

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in C} |f(z)| l_C, \quad (\text{F11})$$

waarin l_C de lengte is van C . Het maximum hoeft nooit uitgerekend te worden. Afschatten is voldoende, in het voorbeeld

$$\left| \frac{1}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{||z|^2 - 1|} = \frac{1}{R^2 - 1} \text{ als } |z| = R > 1,$$

let op de behandeling van de noemer. Het product met $l_C = \pi R$ dwingt de tweede integraal nu naar 0.

Na het zo precies maken van de redenering voor de tweede integraal in (F9) volgt³¹ de uitspraak in (F3). **We hebben de integraal nu uitgerekend in termen van het residu van de functie in zijn singulariteit in het bovenhalfvlak, zonder primitiveren.** In dit voorbeeld, dat in een notedop beschrijft waar het in dit vak omgaat, zijn de antwoorden op de vragen hiermee wel gegeven. Is het altijd zo makkelijk?

Het antwoord is ja, maar er moeten wel een aantal zaken precies gemaakt worden en bewezen. Dat doen we vooral in deel 2 van dit vak. In deel 1 *laten we wel zien waarom het antwoord ja is*. Wat we ten eerste zeker willen weten is dat de rekenpartij hierboven met (F8) veel algemener werkt, dus dat een (uniek bepaalde) beschrijving in de buurt van een geïsoleerde singulariteit in de vorm (F1) altijd mogelijk is. Dit zal een gevolg blijken van het eerst antwoord dat we nu geven. **De stelling van Cauchy-Goursat zegt dat de integraal over een gesloten kromme³² van een (complex differentieerbare) functie nul is als alle punten op de kromme en in het binnengebied van de kromme reguliere punten van de functie zijn.** Hiertoe leunen we zwaar op Vectorcalculus³³:

Als we $f(z)$ schrijven als³⁴

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

waarin $u(x, y)$ en $v(x, y)$ zelf reëel zijn³⁵, dan is, in de notatie van vectorcalculus,

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - \int_C v dy + i \left(\int_C v dx + \int_C u dy \right), \quad (\text{F12})$$

te onthouden via

$$f = u + iv \text{ en } dz = dx + idy.$$

Bij vectorcalculus hebben we al gezien dat een bepaalde type³⁶ lijnintegralen inderdaad alleen van begin- en eindpunt afhangen. Omdat de lijnintegraal over een gesloten³⁷ kromme C in \mathbb{R}^2 met de Stelling van Green omgeschreven kan

³¹Wel nog even nadenken over het tegelijk nemen van de limiet in de grenzen.

³²Ook wel: een kring.

³³Een vak waar we ook vrijwel niets echt bewezen hebben...

³⁴Invullen van $z = x + iy$ is makkelijk, de splitsing $u + iv$ vinden is vervelender.

³⁵Waarbij we het expliciet vinden van u en v graag vermijden trouwens.

³⁶Verrichte arbeid door een conservatief krachtveld op een bewegende puntmassa.

³⁷Zo'n *kringintegraal* wordt meestal genoteerd als \oint i.p.v. \int .

worden naar een dubbele integraal over het *binnengebied* A van C , geldt voor de integralen in (F12) dat

$$\oint_C u dx - \oint_C v dy = \iint_A (-u_y - v_x) dx dy;$$

$$\oint_C v dx + \oint_C u dy = \iint_A (-v_y + u_x) dx dy.$$

Slordig gezegd volgt hieruit dat **voor een gesloten kromme C geldt dat**

$$\oint_C f(z) dz = 0 \text{ als } u_x - v_y = u_y + v_x = 0 \text{ binnen } C,$$

en, als twee niet gesloten krommen C en γ hetzelfde begin- en eindpunt hebben, dat

$$\int_C f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz \text{ als } u_x - v_y = u_y + v_x = 0 \text{ tussen } C \text{ en } \gamma.$$

De vergelijkingen

$$u_x - v_y = u_y + v_x = 0 \tag{F13}$$

heten **de vergelijkingen van Cauchy-Riemann**. Ze komen naar voren als voorwaarde voor het complex differentieerbaar zijn van $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Omdat in de formules van Green de partiële afgeleiden van u en v continu moeten zijn, is het argument hierboven alleen geldig voor complex differentieerbare functies f waarvan de afgeleide f' continu is³⁸. Goursat gaf later een fraaier rechtstreeks bewijs zonder Green's stellingen waaruit bleek dat deze extra eis op de afgeleide niet nodig is. **Op grond van deze stelling verandert de kringintegraal $\oint_C f(z) dz$ niet als we de kromme C vervormen, zolang we met C alleen maar door reguliere punten van f gaan.**

In het bijzonder kunnen we het vervorm-argument toepassen op de integralen

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \text{ en } \oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz,$$

waarbij we de kring C (links)om z_0 heen laten lopen en vervormen naar een cirkel met steeds kleinere straal. De tweede integraal is, net als hierboven in (F7), gelijk aan $2\pi i f(z_0)$. Zonder de stelling van Cauchy-Goursat als voorkennis blijkt, na uitschrijven en afschatten, dat het verschil tussen beide integralen naar nul gaat, als de straal van de cirkel C om z_0 naar nul gaat. Met de informatie van Cauchy-Goursat weten we dat ook de eerste integraal niet verandert bij deformatie. De conclusie is **Cauchy's integraalformule**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{F14}$$

die $f(z_0)$ definieert in termen van de waarden van $f(z)$ op een kring rond z_0 . In het bijzonder volgt, met $C = C_{z_0, \rho}$, dat

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + e^{it}) dt, \tag{F15}$$

³⁸Op en binnen C , dan wel op C en γ en daartussen.

het gemiddelde van $f(z)$ op $C = C_{z_0, \rho}$, en ook, met (F11), dat de absolute waarde $|f(z_0)|$ op zijn hoogst gelijk is aan het gemiddelde $|f(z)|$ op de cirkel $C_{z_0, \rho}$:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + e^{it})| dt, \quad (\text{F16})$$

waaruit blijkt³⁹ dat, als alle punten in \mathbb{C} reguliere punten zijn van f , $f(z)$ niet uniform naar 0 kan gaan als $|z| \rightarrow \infty$ tenzij $f(z) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Met $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ volgt dat elk niet-constant polynoom $P(z)$ een nulpunt⁴⁰ heeft.

Nog veel sterkere conclusies volgen door in (F14) de z_0 als variabele te zien, bijvoorbeeld z_0 in een omgeving van 0, met $C = C_\rho = C_{0, \rho}$, en de (meetkundige) reeksontwikkeling

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} + \frac{z_0^2}{z^3} + \frac{z_0^3}{z^4} + \dots \quad (0 < |z_0| < |z| = \rho)$$

in te vullen in (F14). Dit geeft

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \left(\frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} + \frac{z_0^2}{z^3} + \frac{z_0^3}{z^4} + \dots \right) dz. \quad (\text{F17})$$

Verwisselen van integraal en som blijkt toegestaan, zodat

$$f(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0^3 + \dots, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Deze Taylorreeks voor $f(z_0)$ is geldig voor z_0 binnen $C_\rho = C_{0, \rho}$. Geschreven met andere letters,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

is dit een bijzonder geval van (F2), namelijk $z_0 = 0$.

Een nog wat slimmere toepassing van (F14) geeft het analoge bijzondere geval voor (F1), met dezelfde(!) formules voor a_n : **als $z = 0$ een geïsoleerde singulariteit is van f , dan is**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

en daarmee volgt (schuif z_0 op naar 0) dat (F1) geldt rond elke geïsoleerde singulariteit, met $C_{z_0, \rho}$ in plaats van C_ρ in de formules voor a_n .

Onderdeel van de stelling is ook dat f in elk regulier punt (i.h.b. ook rond elke geïsoleerde singulariteit) oneindig vaak term voor term differentieerbaar is. Daarbij verandert de voorwaarde $0 < |z - z_0| < R$ voor convergentie in (F2) niet. Ook differentiëren naar z_0 in (F14) blijkt toegestaan, zodat **in een regulier punt z_0 (algemene formule van Cauchy)**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_{z_0, \rho}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (\text{F18})$$

³⁹Een bijzonder geval van de Stelling van Liouville.

⁴⁰Dit heet de hoofdstelling van de algebra.

waarmee volgt dat een begrensde functie, waarvoor alle punten in \mathbb{C} regulier zijn, een complexe afgeleide heeft die overal nul is, en dus zelf constant is⁴¹. Tenslotte is, zowel voor (F1) als (F2) de grootst toegestane R de afstand tot het dichtsbijzijnde niet-reguliere punt $z \neq z+0$. Als alle andere punten regulier zijn dan is $R = \infty$ en geldt (F1) voor alle $z \neq z_0$.

Samenvattend tot nu toe.

Cauchy-Goursat: de kringintegraal van een (complex differentieerbare) functie met alleen reguliere punten op de kromme en in het binnengebied is nul.

⇓

Laurent: rond een geïsoleerd singulariteit is een (complex differentieerbare) functie te schrijven als Laurentreeks met integraalformules voor de coëfficiënten.

⇓

Residustelling: de kringintegraal van een (complex differentieerbare) functie met alleen reguliere punten op de kromme en in het binnengebied, met uitzondering van eindig veel geïsoleerde singulariteiten, is gelijk aan $2\pi i$ maal de som van de residuen in het binnengebied.

We zijn echter nog niet klaar. Er zijn nog andere singuliere punten dan geïsoleerde singuliere punten, ook bij min of meer gewone functies. Naast te mijden punten waarin geïsoleerde singulariteiten zich ophopen, bijvoorbeeld $z = 0$ bij

$$f(z) = \frac{1}{\cos(\frac{1}{z}) - 1},$$

om maar eens een engerd⁴² te noemen, zullen we vooral punten tegenkomen waar we niet zomaar *omheen* kunnen lopen omdat $f(z)$ dan een andere waarde blijkt te moeten krijgen. Zulke punten heten *vertakkingspunten*. Een voorbeeld is $f(z) = \sqrt{z}$. Omdat $1^2 = (-1)^2 = 1$, moet deze f kiezen tussen $f(1) = 1$ en $f(1) = -1$. Als z om $z = 0$ heen mag lopen⁴³, dan geeft dat een probleem.

Voor reële $x > 0$ is de tweedegraadswortel uit x , zoals we weten, gelijk aan

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln x\right).$$

Ook de functies \exp en \ln , gebruikt in deze beschrijving van \sqrt{x} , zijn maar op één manier complex te maken, in wezen omdat ze reëel zijn gedefinieerd via limietovergangen en integralen uitgaande van rationale functies:

$$\exp(x) = \lim\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n; \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

De natuurlijke logaritme $\ln x$ is alleen gedefinieerd voor $x \in \mathbb{R}^+$ en het blijkt dat, met $\exp(1) = e$,

$$\exp(x) = e^x,$$

⁴¹De stelling van Liouville.

⁴²Geïsoleerde singulariteiten in $z = \pm \frac{1}{2\pi ni}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

⁴³In \mathbb{C} kun je om nul heenlopen, in \mathbb{R} niet!

eerst voor gehele x , daarna ook voor alle breuken en tenslotte op grond van limietoverwegingen voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dit is de gewone e -macht uit calculus, die 1 is in $x = 0$, en zijn eigen afgeleide is.

Na

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y$$

voor $y \in \mathbb{R}$, wordt bij calculusvakken de complexe functie \exp vaak gedefinieerd als

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y),$$

voor $z = x + iy \in \mathbb{C}$. **Het zal blijken dat deze definitie inderdaad de complex differentieerbare uitbreiding geeft van $\exp(x) = e^x$, maar daarvoor moeten we eerst weten wat complex limieten van complexe differentiequotienten zijn, en hoe je aan de partiële afgeleiden naar x en naar y van het reële deel $u(x, y)$ en imaginaire deel $v(x, y)$ van $f(z)$ kunt zien of die bestaan.**

Omdat er maar één complexe uitbreiding van $\exp(x)$ mogelijk is⁴⁴, is deze complexe $\exp(z)$ de unieke complex differentieerbare uitbreiding van $e^x = \exp(x)$. Daarom schrijven we $e^z = \exp(z)$, ook al is er voor $z \notin \mathbb{R}$ niet echt sprake van machtsverheffen. Wel geldt voor alle z dat

$$\exp(z) = \lim(1 + \frac{z}{n})^n = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots$$

Op grond van de definitie is $\exp(z)$ periodiek met periode $2\pi i$ en dus kan \exp , net als \cos en \sin , geen gewone inverse functie hebben. Oplossen van de vergelijking $\exp(w) = z$ geeft, via de absolute waarde $|z|$ en het argument $\arg z$ van z , dat

$$w = \ln |z| + i \arg z,$$

waarbij $\arg z$ als hoek alleen modulo 2π bepaald is. Bij calculus is dit meestal een beetje aan de orde gekomen⁴⁵.

De definitie van de inverse functie \log van \exp moet dus wel luiden dat⁴⁶

$$\log z = \ln |z| + i \arg z,$$

waarbij we accepteren dat de complexe logaritme⁴⁷ alleen modulo $2\pi i$ gedefinieerd is⁴⁸. In de wiskunde *praktijk* leidt dit tot de term *meerwaardige* functie, hoewel veel wiskundeboeken menen dit woord te moeten mijden⁴⁹. Om dit vertakkingsprobleem, waarbij de waardeverzameling van de meerwaardige functie als het ware vertakt afhankelijk van hoe we met z door \mathbb{C} heenlopen. Gelukkig (?) heeft \log wel een 1-waardige afgeleide:

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Omdat voor $|z - 1| < 1$ geldt dat

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z - 1)} = 1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - (z - 1)^3 + \dots,$$

⁴⁴Hetgeen in feite volgt om dat we al weten dat e^x een machtreeks is voor $x \in \mathbb{R}$.

⁴⁵Bij vergelijkingen als $z^3 = -1$ voor om drie waarden voor $\sqrt[3]{-1}$ te bepalen.

⁴⁶Raak niet in de war door het gebruik van dezelfde letter z bij de inverse functie.

⁴⁷Genoteerd met \log , we schrijven meestal ook \log voor \ln .

⁴⁸A basic fact of scientific life as we know it.

⁴⁹Omdat functies per definitie 1-waardig zijn.

heeft $\log z$ rond $z = 1$ ook een prachtige machtreeksontwikkeling

$$\log z = z - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \dots, \quad (\text{F19})$$

met $\log(1) = 0$. De restrictie $|z-1| < 1$ laat niet toe om met deze keuze van $\log z$ in (F19) rond $z = 0$ te lopen. Als we dat wel doen, 1 keer linksom bijvoorbeeld, dan is $\log 1 = 2\pi i$ geworden en geldt rond $z = 1$ de reeksontwikkeling

$$\log z = 2\pi i + z - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \dots$$

Met de complexe functies \exp en \log zijn de complexe wortelfuncties

$$\sqrt{z} = \sqrt[2]{z} = z^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right), \quad \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} = \exp\left(\frac{1}{3} \log z\right), \dots$$

respectievelijk 2-waardig, 3-waardig etc.

Met de complexe e-macht zijn er nog andere manieren om op het idee van complexe integralen te komen. De nieuwe variable $z = e^{it}$ met $dz = izdt$ ligt voor de hand bij integralen met cosinussen en sinussen, bijvoorbeeld

$$\int \frac{1}{a + \cos^2 t} dt = \int \frac{1}{a + \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2} \frac{dz}{iz},$$

waarna met $\int_0^{2\pi}$ voor t een integraal over $|z| = 1$ verschijnt die we met de residustelling aan kunnen pakken. En met de complexe definitie van \sqrt{z} en $\log z$ kunnen we ook variaties op (F3), meestal met x van 0 naar ∞ , aan. De integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (\text{F20})$$

kan niet complex, maar die konden we al via de transformatie naar poolcoördinaten in de dubbele integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x-y^2} dx dy = \pi,$$

uiteindelijk toch via primitiveren⁵⁰. Andere integralen die we complex aankunnen kunnen zijn Fouriertransformaties als (F4), waarvoor het Lemma van Jordan nog een extra hulpmiddel biedt als de integrand klein wordt van orde $1/R$ en het niet meteen wint van de R in de lengte van de cirkelboog in (F9). Ook de inversieformule voor de Laplace transformatie leidt tot een complexe lijnintegraal⁵¹.

Naast alle complexe escapades met reële integralen, is, met name ook in de fysica, de toepassing van complexe functietechnieken bij het vinden van harmonische functies belangrijk. Het reële en imaginaire deel $u(x, y)$ en $v(x, y)$ van $f(z)$ zijn namelijk harmonisch, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$. Omdat de samenstelling van twee complex differentieerbare functies met de kettingregel

⁵⁰Van re^{-r^2} naar r .

⁵¹De Bromwich integraal.

weer complex differentieerbaar is, kun je proberen harmonische functies op ingewikkelde domeinen te maken met behulp van afbeeldingen naar eenvoudige gebieden, waarbij je voor die afbeeldingen weer complex differentieerbare functies gebruikt. De echte fysische problemen (potentiaaltheorie, stromingsleer) zijn natuurlijk 3-dimensionaal, maar vaak is een 2-dimensionale oplossing toch bruikbaar⁵².

⁵²Bij luchtstroming rond vliegtuigvleugels bijvoorbeeld.