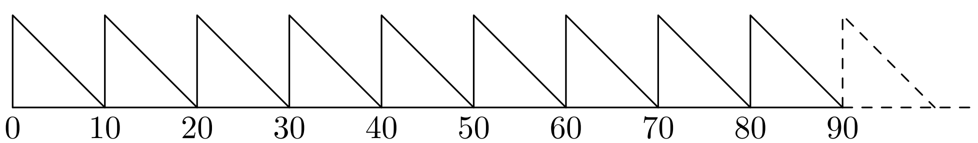
De wiskunde van het wachten

Ger Koole, Vrije Universiteit Amsterdam

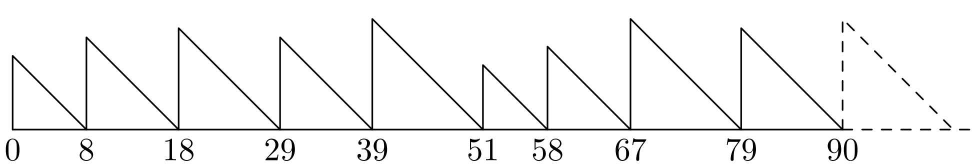
Verschenen in *Pythagoras* **43**(1):30–32, september 2003

Als we in de rij staan bij het postkantoor hebben we vaak het idee dat de klant vooraan in de rij uren bezig is. En het wachten op de bus lijkt ook langer te duren dan je volgens de dienstregeling zou verwachten. Pech, een zinsbegoocheling, of wetenschappelijk verklaarbaar? De wiskunde geeft antwoord.

Laten we naar het voorbeeld van de bussen kijken. Bij de aankomst van de eerste bus begint de tijd te lopen. Stel dat de volgende bus na 10 minuten aankomt; dan is de wachttijd net na de aankomst van de eerste bus 10 minuten. Daarna neemt de wachttijd lineair af tot 0, vlak voor de aankomst van de volgende bus. Is de volgende bus net weg dan is de wachttijd weer 10 minuten, hetgeen weer afneemt naar 0 op tijdstip 20, wanneer de daaropvolgende bus aankomt. In het volgende plaatje is de tijd-wachttijdgrafiek weergegeven.



Bekijk het nu eens vanuit de optiek van een busreiziger die de dienstregeling niet kent. Deze kiest een willekeurig tijdstip om naar de bushalte te gaan, zeg uit het interval $[0, 100]$. Aangezien elk aankomstmoment even waarschijnlijk is is de verwachte wachttijd van deze reiziger gelijk aan de gemiddelde waarde van de wachttijd als aangegeven in bovenstaande figuur. We sommeren dus de oppervlakte onder de grafiek in $[0, 100]$ en delen door 100. De oppervlakte van elke driehoek is $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$, de gemiddelde wachttijd is dus $50 \times 10/100 = 5$ minuten. Dit is precies wat we verwachten: de helft van de gemiddelde tussenaankomsttijd. Dus waar komt nu het gevoel vandaan dat we langer moeten wachten? De sleutel tot de oplossing hangt samen met het feit dat bussen niet precies om de 10 minuten aankomen, maar slechts *gemiddeld* om de 10 minuten. De typische situatie ziet er dan als in onderstaande figuur uit.



Om nu de gemiddelde wachttijd te berekenen moeten we weer de oppervlakte onder de grafiek nemen over een lang interval en delen door de lengte van het interval. Dit komt weer neer op kijken naar één interval, waarbij we de variatie in lengte in aanmerking nemen. Laten we het in formulevorm opschrijven. Stel dat de tussenaankomsttijd altijd één van de waarden $1, 2, \ldots, 20$ aanneemt, en dat de kans dat deze tijd i minuten is gegeven wordt door p_i. Uiteraard moet dan gelden dat $p_1 + \cdots + p_{20} = \sum_{i=1}^{20} p_i = 1$. De oppervlakte van een driehoek van lengte i is $\frac{1}{2} \times i^2$, de oppervlakte van een willekeurige driehoek is dan $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{2} \times i^2 \times p_i$. De gemiddelde tussenaankomsttijd is $\sum_{i=1}^{20} i \times p_i$. De gemiddelde wachttijd W wordt dan gegeven door

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{2} \times i^2 \times p_i}{\sum_{i=1}^{20} i \times p_i}.$$

Laten we het voorbeeld eens doorrekenen. Volgens de dienstregeling komt er elke 10 minuten een bus aan. In werkelijkheid is dat niet precies elke 10 minuten, soms wat meer, soms wat minder, maar gemiddeld om de 10 minuten. Laten we aannemen dat de tijd tussen 2 bussen met kans 0.1 7, 8, 12 of 13 minuten is, en met kans 0.2 is het 9, 10 of 11. We zien dat de som van de kansen 1 is. De gemiddelde lengte van de tussenaankomsttijd is nu weer 10 minuten, want

$$\sum_{i=1}^{20} i \times p_i = 7 \times 0.1 + 8 \times 0.1 + 9 \times 0.2 + \cdots + 13 \times 0.1 = 10.$$

De oppervlakte van een willekeurige driehoek is

$$\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{2} \times i^2 \times p_i = \frac{1}{2} \times 7^2 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 8^2 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 9^2 \times 0.2 + \cdots + \frac{1}{2} \times 13^2 \times 0.1 = 51.5.$$

Het quotient nemen van de beide uitkomsten levert de gemiddelde wachttijd op:

$$W = \frac{51.5}{10} = 5.15,$$

dus 5 minuten en 9 seconden: iets langer dan 5 minuten. De reden van deze langere wachttijd is het feit dat het waarschijnlijker is dat een willekeurig aankomende klant in een lang interval terechtkomt dan in een kort. En komt de bus dan eindelijk, dan blijkt hij ook nog tjokvol te zijn! Als je wilt zitten kan je beter op de volgende bus wachten.

Dit verschijnsel staat bekend als de wachttijd- of inspectieparadox, en komen we in allerlei situaties tegen. Het verklaart ook waarom de klant die in bediening is bij het postkantoor op het moment dat we aankomen er zo lang over doet. En: hoe meer spreiding in de tussentijden, hoe groter de kans dat we lang moeten wachten! Het antwoord op de beginvraag moet dan ook luiden dat het wetenschappelijk verklaarbaar is dat je vaker pech hebt dan niet.