# Het Bazel probleem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

André Ran

VU University Amsterdam

## Het probleem

Bepaal

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots .$$

In moderne notatie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Het probleem staat bekend onder de naam: Het Bazel probleem.

De titel van de lezing geeft het antwoord, maar als wiskundigen zijn we daarmee niet tevreden.

We bekijken de geschiedenis van het probleem, we schetsen een bewijs (van Euler), en vertellen er nog wat omheen.

# Pietro Mengoli probleem beschrijving

In 1644 geeft Pietro Mengoli het probleem: wat komt er uit

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots ?$$

Even in een kader plaatsen. Mengoli is professor in de arithmetica in Bologna, hij zal in 1647 zijn leermeester Cavalieri daar opvolgen als professor in de wiskunde.

## Het tijdsgewricht om maar eens een modernisme te gebruiken

Eerste helft zeventiende eeuw:

| | |
|---|---|
| In Italië | Galilei, Cavalieri, Toricelli. |
| In Frankrijk | Descartes, Fermat, Pascal. |
| In Duitse landen | onder andere Kepler. |
| In Engeland | onder andere Wallis. |
| In Holland | Hudde, Sluse, van Schoten (later ook Huygens). |

Calculus is in ontwikkeling: er worden raaklijn constructies gedaan, oppervlakten en inhouden berekend.
Algebra (Viète, tweede helft zestiende eeuw) is redelijk ontwikkeld.

In 1637 publiceert Descartes zijn Geometrie. Analytische meetkunde begint, en onze moderne manier om wiskunde te doen is in deze periode in ontwikkeling.

## Reeksen

Er is aandacht voor reeksen en oneindige producten (onder andere Wallis). Daar doet Mengoli aan. Hij bewijst onder meer de volgende zaken:

- De harmonische reeks is divergent:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \to \infty.$$

- De alternerende harmonische reeks heeft een interessante som

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots = \ln 2.$$

- Hij geeft een bewijs voor de formule van Wallis:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

- En nog veel meer. Maar hij kan niet berekenen wat de uitkomst is van

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

en hij noemt het probleem in zijn geschriften.

Hoe komt het probleem dan aan de naam: “Het Bazel probleem”?

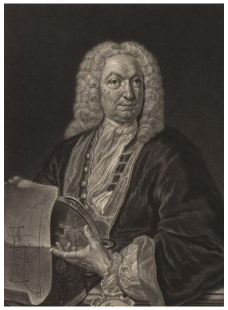
Waarom niet: Het probleem van Mengoli?

# Bernoullis

We maken een sprong in de tijd: tweede helft van de zeventiende eeuw.

Newton en Leibniz (student van onze Christiaan Huygens!!) hebben de calculus ontwikkeld.

Vooral de Bernoulli broers Jakob (links) en Johann (rechts) hebben de calculus van Leibniz omarmd. Het levert de oplossing van heel veel problemen.



# Het Bazel probleem

Jakob werkt in Bazel, Johann in Groningen, later ook in Bazel.

Jakob populariseert het probleem van Mengoli. Hij schrijft er in 1689 over. Maar geen van beide broers kan het oplossen. Leibniz ook niet.

Vanwege Jakob's geschrift: Het Bazel probleem.

Het wordt een "bekend probleem"!

# De oplossing: Euler

We maken weer een sprong in de tijd. De eerste helft van de achttiende eeuw. Centraal figuur in de wiskunde is Leonhard Euler, die studeerde bij Johann Bernoulli (Jakob is dan al dood). Omdat Euler zo belangrijk is krijgt hij ook een groter plaatje dan de rest.

## De oplossing

In 1735 schrijft Euler een artikel:

De summis serierum reciprocarum,
*Comm. Acad. Sci. Petrop.* 7, 1740, p. 123-134.

Daarin geeft hij maar liefst drie bewijzen voor de oplossing van het Bazel probleem.

Het probleem laat hem ook niet los, en in 1741 schrijft hij nog een artikel met een vierde oplossing:

Démonstration de la somme de cette suite
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$etc.
*Journ. lit. d'Allemange, de Suisse en du Nord*, 2:1, 1743, p. 115-127.

# Euler's derde bewijs

Euler kent vanuit de algebra de volgende stelling:

Stelling *Laat $P(x)$ een polynoom van graad $n$ zijn met $P(0) = 1$, en*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + 1.$$

*Laat $x_1, \ldots, x_n$ de nulpunten zijn van $P$. Dan geldt:*

$$P(x) = (1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2}) \cdots (1 - \frac{x}{x_n}),$$

*en dus (vergelijk de term met $x$)*

$$-a_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}.$$

Bijvoorbeeld het polynoom $6x^2 + 5x + 1 = (2x + 1)(3x + 1)$, en inderdaad $-5 = \frac{1}{-1/2} + \frac{1}{-1/3}$.

## Euler's derde bewijs, vervolg

Euler past dat nu zonder scrupules toe op de functie:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= (1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{2\pi})(1+\frac{x}{2\pi})(1-\frac{x}{3\pi})(1+\frac{x}{3\pi})\cdots \\ &= (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})(1-\frac{x^2}{16\pi^2})\cdots\end{aligned}$$

Dat leidt hem tot de formule

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}).$$

Hij ziet dat als een polynoom in $x^2$

## Intermezzo: modern gezeur

Wij maken natuurlijk meteen bezwaar!
Waarom convergeert dit oneindige product?
Waarom is de uitkomst de functie $\frac{\sin x}{x}$ en niet bijvoorbeeld $e^x \frac{\sin x}{x}$?
Die functie heeft toch dezelfde nulpunten?

Euler heeft het vast voor een paar waarden van $x$ echt uitgerekend (althans, een flink aantal termen met elkaar vermenigvuldigd). Rekenmachines bestonden nog niet, maar Euler kon heel goed rekenen als we de bronnen mogen geloven.

Hoe dan ook, Euler geeft bij meerdere gelegenheden er blijk van dat hij zich wel zorgen maakt over convergentie, al kent hij de term en het begrip nog niet. Dat soort problematiek komt pas in de negentiende eeuw.

## Terug naar Euler's bureau om over zijn schouder mee te kijken

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}).$$

Verder kent Euler zijn machtreeksen voortreffelijk:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots .$$

Nu vergelijkt hij in deze formules de termen met $x^2$, en dan komt het konijn uit de hoge hoed:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$$

en dat is het antwoord op het Bazel probleem! Mooi, te gek, hot stuff, gaaf, vet cool, al naar gelang van welke generatie u bent.

## Connectie met de zeta functie

Dit vereist ook een wat langere inleiding, en het is ook weer allemaal van Euler. Euler voert in de getallen

$$\zeta(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^j}.$$

Het bewijs hierboven geeft aan dat $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

De getallen spelen een belangrijke rol in allerlei delen van de wiskunde.

In het volgende laten we zien hoe Euler komt tot formules voor de getallen $\zeta(j)$ voor *even* $j$.

# De cotangens

In zijn *Introductio in Analysin Infinitorum* komt Euler met de volgende fantastische formule:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}.$$

In moderne termen: de polen van de cotangens zijn de getallen $\pm n\pi$, en de residuen zijn 1. Voor een mooi bewijs afkomstig van Herglotz, zie bijvoorbeeld "Proofs from the Book".

Herschrijf die formule als volgt:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} = \frac{1}{x} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2\pi^2 - x^2}.$$

# Voort met die cotangens

Dus

$$
\begin{aligned}
x \cot x &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2\pi^2 - x^2} \\
&= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - (\frac{x^2}{n^2\pi^2})}.
\end{aligned}
$$

Gebruik nu de formule voor een meetkundige reeks:

$$
\begin{aligned}
x \cot x &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^k \\
&= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) x^{2k} \\
&= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2k}} \zeta(2k) x^{2k}.
\end{aligned}
$$

## Complexe Euler

Voor ons min of meer gewoon, in Euler's tijd compleet nieuw (ook de notatie!)

$$x\cot x = x\frac{\cos x}{\sin x} = ix\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = ix\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$$
$$= ix + \frac{2ix}{e^{2ix}-1} = ix + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2ix)^n}{n!},$$

voor een of andere getallen $B_n$ (dat blijken later de Bernoulli getallen te zijn van Jakob Bernoulli).

Merk op: $x\cot x$ is een even functie. Dus de term met $ix$ voor het somteken moet wegvallen tegen de term met $B_1$, en verder zijn alle $B_j = 0$ als $j$ oneven is. Dat geeft

$$x\cot x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} x^{2k}.$$

# En dan....

Euler heeft het weer voor elkaar: twee niet-triviale formules voor dezelfde functie!

$$x \cot x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} x^{2k} \qquad = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2k}} \zeta(2k) x^{2k}.$$

Vergelijk de coefficienten, en herinner de definitie van $\zeta(j)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \zeta(2k) = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} \pi^{2k}.$$

Euler rekent er nu eerst een aantal echt uit, en realiseert zich pas na wat rekenwerk dat die getallen $B_{2k}$ hem wel erg bekend voorkomen: het zijn de Bernoulli getallen, en daarvoor is een recursieve betrekking om ze uit te rekenen. Bijvoorbeeld: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

# Nog wat meer

Maar hoe zit het nu met $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$?

Daarover is bedroevend weinig bekend. Wat weten we dan wel? In ieder geval meer dan toen ik student was.

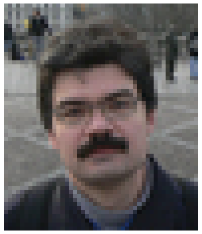
- $\zeta(3)$ is irrationaal. Dat is in 1978 bewezen door Roger Apéry, en $\zeta(3)$ heet nu dan ook Apéry's constante.

A.J. van der Poorten: A proof that Euler missed. Math. Intelligencer 1 (1979), 195-203.

# En verder

• Er zijn oneindig veel $n$ waarvoor $\zeta(2n+1)$ irrationaal is, dat is bewezen door Tanguy Rivoal in 2000.

• Een van de getallen $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrationaal, en dat is bewezen door Wadim Zudilin in 2001.



# Tenslotte

Dank voor uw aandacht, ik hoop u aangenaam verpoosd te hebben.....

Referenties:

Evaluating $\zeta(2)$. Robin Chapman, Dept. of Math. Univ. of Exeter.
Meerdere bewijzen.
How Euler did it. Ed Sandifer. MAA Online.
Zie ook Ed Sandifer's webpagina voor een uitgebreide versie hiervan.