In de studiegroep 'Wiskunde met de industrie' worden jaarlijks problemen uit het bedrijfsleven voorgelegd aan wiskundigen. In 2005 vond de bijeenkomst plaats op de vrije Universiteit te Amsterdam. **Sandjai Bhulai** en **Corrie Quant** beschrijven de werkwijze van de studiegroep en zoomen vervolgens in op twee problemen die aan de orde kwamen.

Over selectieproblemen en weegschema's

In de week van 31 januari tot en met 4 februari 2005 vond aan de Vrije Universiteit te Amsterdam de 52ste Studiegroep Wiskunde met de Industrie plaats. Ongeveer zeventig deelnemers uit binnen- en buitenland bogen zich die week over zes wiskundige problemen uit de praktijk, die veelal door het bedrijfsleven aangeleverd werden. Voordat we hier nader op ingaan, vertellen we eerst iets over de historie en werkwijze van de studiegroepen.

Historie en werkwijze

Het principe van dit soort studiegroepen stamt uit 1968, toen voor het eerst de European Study Group with Industry (ESGI) in Oxford werd georganiseerd. De studiegroep is bedoeld voor iedereen die actief wil zijn met het modelleren en oplossen van problemen uit de industriële praktijk. Een week lang werken enthousiaste wiskundigen uit heel Europa: afstudeerders, aio's, UD's, UHD's, hoogleraren en wiskundigen uit de industrie samen aan concrete industriële problemen. De eerste studiegroep in Nederland werd in 1998 in Leiden gehouden en sindsdien is deze activiteit een succesvolle jaarlijkse traditie geworden.

Op de eerste dag van de workshop legt een aantal industriële en commerciële organisaties een technisch probleem voor aan de wiskundigen. De problemen komen uit zeer uiteenlopende bedrijfstakken, maar lenen zich allemaal voor wiskundige modellering en analyse. Na de presentaties kunnen de deelnemers zelf bepalen aan welke problemen ze verder werken. Meedenken over meer dan één onderwerp wordt zeer op prijs gesteld en komt dan ook veel voor. De dagen daarop zijn gevuld met veel brainstormsessies, wiskundige modellering en gereken. Dit resulteert meestal in veel ideeën die kunnen bijdragen tot een oplossing van het probleem. Deze worden dan ook op de laatste dag van de workshop aan de industriële partners gepresenteerd. Meestal begint het echte onderzoekswerk pas daarna, waarvoor de nuttige contacten tussen de universiteit en industrie al gedurende de workshop gelegd zijn.

Behalve dat de studiegroep een leuke ervaring is, biedt het ook een forum voor kennisexploitatie van wiskundigen om nieuwe perspectieven en ideeën te ontwikkelen voor industriële problemen. De reacties van de industriële partners zijn dan ook veelal positief; de oplossingen en inzichten zijn gerelateerd aan bestaande problematiek, die wellicht ook een lange-termijnimpact kan hebben. De studiegroep reikt echter ook verder dan de participanten alleen; het stimuleert bij de gemeenschap het bewustzijn dat wiskunde een krachtig middel kan zijn dat kan bijdragen aan oplossingen van relevante industriële problemen.

De problemen op SWI

Op SWI 2005 werd een keur van verschillende problemen gepresenteerd. Een drietal problemen was stochastisch van aard. Zo wilde de KLM graag een strategie ontwikkelen om de hoeveelheid mee te nemen drinkwater per vlucht te bepalen. Het risico op een tekort aan water moest daarbij klein gehouden worden. Het feit dat de waterhoeveelheden met een grote onnauwkeurigheid gemeten worden, maakte dit probleem extra lastig. Het Nederlands Forensisch Instituut (NFI) vroeg zich af in hoeverre selectie effecten een rol spelen bij het bepalen van de kracht van bewijsmateriaal. Het Nederlands Meetinstituut (NMi) was op zoek naar een methode om hun referentiegewichten zo nauwkeurig mogelijk te bepalen.

Andere problemen vroegen om een benadering vanuit de analyse. Door het Academisch Medisch Centrum (AMC) werd een probleem aangedragen over de regeling van de temperatuur van lichamen bij openhartoperaties. Bij deze operaties wordt het lichaam van de patiënt afgekoeld en moet na de operatie weer opgewarmd worden. De bedoeling was om de data die bij het afkoelingsproces van een patiënt verzameld worden, te gebruiken om op een goede manier het lichaam ook weer op te warmen. Het instituut voor Fundamentele en Klinische Bewegingswetenschappen van de Vrije Universiteit diende een probleem in over neuromusculair onderzoek. Het doel was om wiskundige technieken te ontwikkelen om elektrische signalen, die op de huid gemeten worden als gevolg van spieractiviteit, te relateren aan specifieke motoreenheden die de spieren aansturen.

Tenslotte was er een probleem op het gebied van de numerieke wiskunde. De Software Improvement Group (SIG) zocht naar een manier om op een geschikte wijze grote softwaresystemen in kleinere modules op te delen zodat het geheel goed te behappen blijft.

Er was dus voor elk wat wils. We kunnen niet op alle problemen uitgebreid ingaan, maar werpen een blik in de keukens van de groepen die aan het probleem van het NFI en het NMi werkten.

Selectieproblemen bij het NFI

Bij forensisch onderzoek spelen selectie-effecten op verschillende manieren een rol. We zoomen in op één van de voorbeelden die bij de presentatie van het probleem door het NFI gegeven werden.

Stel dat er door de politie een vezel is gevonden op de plaats van een delict en dat eenzelfde vezel gevonden wordt op kleding in het huis van een verdachte. De forensisch expert moet een uitspraak doen over de kracht van dit bewijsmateriaal. Is het daarbij alleen van belang hoe zeldzaam de vezel is, of maakt het ook uit op welke manier deze vezel gevonden is? Je kunt je voorstellen dat de kans om een overeenkomende vezel te vinden groter wordt naarmate je langer doorzoekt; moet de forensisch expert daar rekening mee houden?

Om gevoel te krijgen voor de invloed van selectie bij bewijsmateriaal bekeek de groep onder andere de volgende (sterk vereenvoudigde) situatie.

Veronderstel dat er een delict heeft plaatsgevonden waarbij de dader een vezel van zijn trui heeft achtergelaten op het slachtoffer. Deze vezel kan geclassificeerd worden als een vezel van type V. We willen graag te weten komen wie de dader is. Omdat er behalve de achtergelaten vezel geen andere aanwijzingen zijn, wordt de garderobe van een willekeurig persoon (de verdachte) onderzocht. Er wordt een trui gevonden die vezels van het type V bevat. Wat kunnen we zeggen over de kans dat onze verdachte de dader is?

In het meest eenvoudige model van deze situatie veronderstellen we dat de verdachte k verschillende truien heeft, waarvan er één van vezeltype V is gemaakt. De kans dat hij een specifieke trui droeg op de dag van het delict nemen we gelijk aan $\frac{1}{k}$. Verder nemen we aan dat de rest van de bevolking een fractie f van de tijd truien van vezeltype V draagt. We kunnen nu de kans berekenen dat de verdachte de dader is, *gegeven* de match van de vezels. Het is belangrijk om je te realiseren dat het niet voldoende is om alleen de kansen op de match, gegeven dat de verdachte al of niet de dader is, te vergelijken, hoewel deze kansen wel gerelateerd zijn aan de eerder genoemde kans.

We schrijven D voor de gebeurtenis dat de verdachte de dader is. Vervolgens schrijven we E_1 voor de gebeurtenis dat een vezel van type V op het slachtoffer wordt achtergelaten en E_2 voor de situatie dat de verdachte een trui van vezeltype V bezit. We zijn op zoek naar de kans dat de verdachte de dader is, gegeven de match van de vezels: $\mathrm{P}(D|E_1 \cap E_2)$. Met behulp van de regel van Bayes kunnen we deze kans berekenen:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(D|E_1 \cap E_2) \\
&\quad = \frac{\mathrm{P}(D \cap E_1 \cap E_2)}{\mathrm{P}(E_1 \cap E_2)} \\
&\quad = \frac{\mathrm{P}(E_1 \cap E_2|D)\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(E_1 \cap E_2|D)\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E_1 \cap E_2|D^c)\mathrm{P}(D^c)} \\
&\quad = \left[1 + \frac{\mathrm{P}(D^c)}{\mathrm{P}(D)} \frac{\mathrm{P}(E_1 \cap E_2|D^c)}{\mathrm{P}(E_1 \cap E_2|D)}\right]^{-1} \\
&\quad = \left[1 + \frac{\mathrm{P}(D^c)}{\mathrm{P}(D)} \frac{\mathrm{P}(E_2|D^c)\mathrm{P}(E_1|D^c \cap E_2)}{\mathrm{P}(E_2|D)\mathrm{P}(E_1|D \cap E_2)}\right]^{-1} \\
&\quad = \left[1 + \frac{\mathrm{P}(D^c)}{\mathrm{P}(D)} \frac{\mathrm{P}(E_2)f}{\mathrm{P}(E_2)k^{-1}}\right]^{-1} \\
&\quad = \left[1 + fk\frac{\mathrm{P}(D^c)}{\mathrm{P}(D)}\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

We zien dat hoe kleiner f is (dus hoe zeldzamer de vezel), hoe groter de kans is dat onze verdachte de dader is. Als de verdachte veel truien heeft, maakt dat de kans dat hij de dader is juist kleiner. Dit ligt ook voor de hand: als iemand heel veel truien heeft, dan zit er vast wel een met een overeenkomende vezel bij. Hierdoor is de bewijskracht van een match van de vezels natuurlijk klein. We zien dus dat de hele garderobe van de verdachte van belang is, niet alleen de trui met de overeenkomende vezel.

Hoewel dit een heel eenvoudig model is, is het duidelijk dat selectie-effecten in dit soort situaties zeker een rol spelen.

Het eerste deel van dit artikel is gebaseerd op het artikel 'Selection effects in forensic science' dat Geert Jan Franx, Yves van Gennip, Peter Hochs, Misja Nuyens, Luigi Palla, Corrie Quant en Pieter Trapman hebben geschreven voor de te verschijnen proceedings van SWI 2005.

Weegschema's

fig. 1 De Nederlandse standaardkilogram

De kilogram is de laatste fysische grootheid die nog gedefinieerd is in termen van een tastbaar object: het is de massa van een platinum-iridium cilinder, vervaardigd in 1889, die bij het 'Bureau des Poids et des Mesures' in Frankrijk bewaard wordt. Om precies te zijn is de kilogram gedefinieerd als de massa van dit object net nadat het gewassen is. Platinum-iridium adsorbeert koolhydraten uit de atmosfeer, waardoor de cilinder regelmatig gewassen moet worden om het gewicht te verwijderen dat erop neergeslagen is.
In Nederland is het Nederlands Meetinstituut (NMi) in letterlijke zin verantwoordelijk voor de kilogram: de Nederlandse standaardkilogram, de platinum-iridiumcilinder nummer 53, wordt op NMi-terrein onder zorgvuldig gereguleerde omstandigheden bewaard. De cilinder reist af en toe naar Parijs om daar vergeleken te worden met de internationale standaard. Uiteraard draagt het NMi zorg voor meer dan alleen de veilige opslag van de kilogram: de afdeling 'massameting' is onder meer ook verantwoordelijk voor zeer nauwgezette calibratie van gewichten. Deze gewichten worden gebruikt om de massa's van gewichten van lagere standaarden te bepalen, die bijvoorbeeld door supermarkten gebruikt worden om hun weegschalen te calibreren, of door dopinglaboratoria, waar zeer kleine massa's met grote nauwkeurigheid vastgesteld moeten worden.
Voor de calibratie van gewichten gebruikt het NMi gewichten van roestvrij staal, waarvan de massa's met zeer grote nauwkeurigheid bepaald moeten worden. Om resultaten met voldoende precisie te verkrijgen, moeten de metingen gecorrigeerd worden voor effecten als de opwaartse luchtdruk en de verschillen in de positie van het massamiddelpunt voor verschillende gewichten.

Het probleem

De Nederlandse kilogram wordt gebruikt als startpunt in het bepalen van de massa's van de gewichten van de hoogste kwaliteit roestvrijstaal: eerst wordt de massa van een roestvrijstalen kilogram bepaald door directe vergelijking met de nationale standaard. In de tweede stap wordt de twee roestvrijstalen kilogram gebruikt en niet de nationale platinum-iridium kilogram, opdat externe invloeden minimaal effect hebben op de nationale standaard. De roestvrij stalen kilogram wordt vervolgens gebruikt om een roestvrij stalen set van gewichten te calibreren bestaande uit een gewicht met nominale massa van 500 gram, twee van 200 gram en twee van 100 gram, zodat de honderdvouden van 1000 gram naar 100 gram gedekt zijn. Het verschil tussen de nominale massa en de echte massa van de gewichten is extreem klein. De gewichten van deze set worden vervolgens gebruikt om massa's van andere sets met andere ranges te bepalen.
Om de massa van een individueel gewicht te bepalen, kunnen we het vergelijken met het standaardgewicht met gelijke nominale massa waarvan de feitelijke massa bekend is met voldoende nauwkeurigheid – tenzij we natuurlijk de massa op het hoogste niveau van precisie willen bepalen. Massametrologie-instituten gebruiken zogenaamde *weegschema's* om dit probleem op te lossen. Een weegschema voor de set van gewichten van 1000 g naar 100 g van het NMi bestaat uit paren van combinaties van gewichten uit de collectie van de zes gewichten. Een schema kan bijvoorbeeld een vergelijking van een van de 200 g gewichten met de twee 100 g gewichten in zich hebben. Voor elk paar in het schema worden de verschillen in massa tussen de twee paren bepaald door middel van de STS-procedure, die hieronder beschreven zal worden. Om voldoende precisie te garanderen worden de paren in een weegschema zo gekozen dat ze gelijke nominale massa hebben.
Het is in theorie mogelijk om de vijf onbekende massa's

te bepalen door vijf geschikte metingen van massaverschillen uit te voeren. In de praktijk worden er echter meetfouten gemaakt en moeten er meer metingen – niet noodzakelijk allemaal met verschillende combinaties van gewichten – verricht worden om tot nauwkeurigere schattingen van de ware massa's te komen. De schattingen van de massa's van de gewichten en de onzekerheid in deze massa's kunnen verkregen worden uit een overbepaald stelsel met behulp van de kleinste kwadratenanalyse.
Gedurende de 'Studiegroep Wiskunde met de Industrie' die in februari 2005 aan de Vrije Universiteit gehouden werd, werd de volgende vraag door het NMi gesteld: 'Wat is een optimaal weegschema voor de set van gewichten van het NMi, dat wil zeggen een weegschema dat de onzekerheid in de geschatte massa's minimaliseert onder de voorwaarde dat het aantal metingen kleiner is dan een gegeven getal'.

De STS-procedure

Zoals eerder vermeld, wordt voor elk paar in een weegschema het verschil in massa bepaald door middel van de STS-procedure. Neem, om de STS-procedure te illustreren, twee sets van gewichten met ongeveer dezelfde massa. De balans om de massaverschillen te meten is een balans met enkelvoudige arm, waarmee het massaverschil tussen twee sets gewichten als volgt bepaald wordt. De eerste set, die we de standaardset (S) noemen, wordt geplaatst op de balans, die daarna op 0 wordt gesteld. De set S wordt verwijderd, en daarna nog eens op de balans geplaatst, waarna de eerste meting, x_0, afgelezen wordt.
Helaas is x_0 in het algemeen niet gelijk aan nul; in de praktijk wordt er een drift geobserveerd tussen opeenvolgende metingen, ook worden er meetfouten gemaakt. Vervolgens wordt de set S verwijderd en de tweede set, die we de testset (T) noemen, wordt op de balans geplaatst, waarna de tweede meting, x_1, afgelezen wordt. De metingen worden nu door S en T te alterneren voortgezet; dit verklaart de naam STS-procedure.Als de drift niet al te wild fluctueert tussen opeenvolgende metingen, dan kan dit geëlimineerd worden door gebruik te maken van de STS-procedure.
De metingen worden zo veel mogelijk herhaald om tot betrouwbare resultaten te komen. In de opstelling die het NMi nu gebruikt, worden de gewichten handmatig op elkaar gestapeld, wat een tijdrovende procedure is. In de praktijk is het daarom zelden mogelijk om meer dan 20 metingen te verrichten zonder onderbrekingen.

Het modelleren van STS-metingen

Stel dat we $k + 1$ STS-metingen verrichten met de sets S, met massa m_S, en T, met massa m_T. Laat x_i de i-de meting zijn, voor $0 \le i \le k$. We veronderstellen dat

$$x_i = 1_{\{i \text{ oneven}\}}(m_T - m_S) + D(i) + V_i$$

waar V_i een meetfout is, die we proportioneel aan de totale massa op de balans veronderstellen. Om precies te zijn nemen we aan dat

$$V_i \sim N(0, \alpha^2 m_S^2), \qquad (1)$$

waarbij $\alpha \in \mathbf{R}$ een onbekende constante is. De term $D(i)$ beschrijft de drift van de balans. We gaan er vanuit dat

$$\frac{D(i+1) + D(i-1)}{2} - D(i) \approx 0 \qquad (2)$$

voor alle $1 \le i \le k - 1$, wat consistent is met aannamen die doorgaans door het NMi gemaakt worden. Aan deze eis wordt natuurlijk voldaan wanneer D lineair is.
Definieer voor $1 \le i \le k - 1$

$$\Delta\mu_i = \frac{(-1)^{i+1}}{m_S}\left(x_i - \frac{x_{i+1} + x_{1-1}}{2}\right) \approx \frac{m_T - m_S}{m_S} + E_i \qquad (3)$$

waarbij

$$E_i = \frac{1}{m_S}\left(V_i - \frac{V_{i+1} + V_{i-1}}{2}\right) \approx N(0, \alpha^2),$$

onafhankelijk van m_S. Observeer dat, gebruikmakend van (2), de drift geëlimineerd wordt.
In de procedure die nu door het NMi gebruikt wordt, wordt het gemiddelde van de $\Delta\mu_i$ gebruikt als een benadering voor $\frac{m_T - m_S}{m_S}$.

We stellen een procedure voor die deze tussenliggende stap overbodig maakt.

Optimale weegschema's

Na het modelleren van de STS-metingen kunnen de optimale weegschema's voor de set van gewichten van het NMi bepaald worden. De balans in de STS-procedure kan gebruikt worden om nauwkeurig hele kleine verschillen in massa's te meten, maar kan niet met voldoende precisie voor grote massaverschillen gebruikt worden. Dit impliceert dat de test- en standaardmassa's in een STS-meting dezelfde nominale massa moeten hebben, wat een sterke restrictie in het aantal mogelijke combinaties met zich meebrengt. In feite zijn er voor de set van gewichten van het NMi slechts 10 mogelijke combinaties (of: weegvergelijkingen) mogelijk. Deze worden in de volgende tabel weergegeven:

Tabel 1: Mogelijke combinaties van gewichten (in nominale massa's genoteerd)

Weegvergelijking	Standaard	Test
1	1000	500, 200, 200•, 100
2	1000	500, 200, 200•, 100
3	500	200, 200•, 100
4	500	200, 200•, 100•
5	200, 100	200•, 100•
6	200, 100•	200•, 100
7	200	200•
8	200	100, 100•
9	200•	100, 100•
10	100	100•

De notatie 200 en 200• wordt gebruikt om het onderscheid tussen de twee gewichten met nominale massa 200 g te maken. (Analoog geldt dit ook voor de twee gewichten met nominale massa 100 g).
Bij een gegeven weegschema kan er een reeks van STS-metingen worden gedaan voor elke weegvergelijking in het schema. Zodoende krijgen we een reeks van $\Delta\mu_i$, zoals gedefinieerd in (3), voor elk van deze combinaties. De $\Delta\mu_i$ kunnen gecombineerd worden in een standaard lineair model. Met behulp van statistische technieken kan er een schatting gegeven worden van de ware massa's van de gewichten uitgedrukt in de gemeten waarden van de $\Delta\mu_i$, alsmede een schatting van de onzekerheid. In deze procedure worden de $\Delta\mu_i$ gebruikt, en niet het (ongewogen) gemiddelde, zoals in de huidige procedure bij het NMi gedaan wordt. Deze aanpassing leidt tot betere schattingen.

Veronderstel nu dat we een optimaal schema willen berekenen met een gegeven aantal weegvergelijkingen, die niet allemaal noodzakelijkerwijs verschillend zijn: een meting herhalen van dezelfde vergelijking in een weegschema kan nuttig zijn, omdat herhalingen extra, onafhankelijke informatie verschaffen. Als deze vergelijkingen uit Tabel 1 moeten komen, dan is het aantal weegschema's bestaande uit N vergelijkingen begrensd door 10^N (deze grens is uiteraard niet scherp). Het gevolg hiervan is dat het mogelijk is om de onzekerheid in de massa's van de gewichten door te rekenen voor alle mogelijke weegschema's bestaande uit maximaal veertien vergelijkingen – het maximum aantal opgelegd door het NMi – met behulp van Matlab op een gewone computer. Het huidige weegschema van het NMi kent acht weegvergelijkingen uit Tabel 1. De vergelijkingen worden gegeven door:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Het is onduidelijk hoe dit weegschema, dat dateert uit een tijd waarin alle mogelijke schema's doorrekenen niet mogelijk was, tot stand is gekomen. Met behulp van de hedendaagse moderne computers is het mogelijk om aan te tonen dat dit schema niet optimaal is. Dus het is mogelijk een ander weegschema met acht weegvergelijkingen te construeren zodanig dat de onzekerheid in de geschatte massa's van de gewichten kleiner is.
De volgende tabel geeft de optimale schema's bestaande uit N combinaties $8 \leq N \leq 14$ weer, waarbij aangenomen wordt dat voor elke weegvergelijking er 20 STS-metingen verricht worden.

Tabel 2: Optimaal weegschema bestaande uit vergelijkingen uit Tabel 1

N	optimaal weegschema
8	1, 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10
9	1, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10
10	1, 1, 2, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10
11	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10
12	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 10
13	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 9, 10, 10
14	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9, 10, 10

De onzekerheid in het weegschema van het NMi is 1,1812 α^2, waarbij α de constante is in (1), terwijl de onzekerheid in het optimale schema met acht vergelijkingen 0,8468 α^2 is. Dit betekent dus dat er een reductie van ongeveer 28% in onzekerheid bewerkstelligd kan worden zonder extra metingen te verrichten. Als het aantal weegvergelijkingen in het schema verhoogd wordt tot veertien, wat overigens extra werk met zich meebrengt, dan kan de onzekerheid tot 0,4655 α^2 teruggebracht worden, een reductie van ongeveer 63%. Zoals wel te verwachten is, neemt de onzekerheid af naarmate het aantal weegvergelijkingen in het schema toeneemt.

Het is opvallend dat in geen van de optimale schema's de vergelijkingen 5 en 6 voorkomen, de enige vergelijkingen waarbij de standaardset uit meer dan één gewicht bestaat. Het schema van het NMi bevat deze vergelijkingen wel. In feite bevat geen enkele oplossing binnen 1% van de optimale de vergelijkingen 5 en 6, wat impliceert dat dit geen effect van afrondingsfouten is. In plaats van de vergelijkingen 5 en 6, bevat het optimale schema vergelijkingen 7 en 10. Ga na dat deze samen dezelfde informatie verschaffen als de vergelijkingen 5 en 6 samen. In praktische situaties leidt dit tot een reductie in onzekerheid, vanwege het feit dat vergelijkingen 7 en 10 minder opstapelingen van gewichten vereisen.
Het verhogen van het aantal weegvergelijkingen is niet de enige manier om de onzekerheid te reduceren in de schattingen van de ware massa's. In de nabije toekomst

stapt het NMi over op automatische balansen die de STS-metingen minder afhankelijk maken van handmatige procedures. Bovendien kunnen er zo ook meer metingen verricht worden in een STS-serie.
Het verhogen van het aantal STS-metingen per weegvergelijking kan effectiever zijn dan het verhogen van het aantal weegvergelijkingen: het optimale schema bestaande uit tien vergelijkingen met 30 STS-metingen per vergelijking heeft een kleinere onzekerheid (0,4358 α^2) dan het schema met twaalf vergelijkingen en 25 STS-metingen (0,4458 α^2). In beide gevallen is het aantal metingen in totaal 300. Het verhogen van het aantal STS-metingen per weegvergelijking is echter niet altijd de beste aanpak: 10×28 STS-metingen leiden tot betere schattingen dan 8×35 metingen.

Andere sets van gewichten

Verschillende massametrologieinstituten gebruiken verschillende sets van gewichten. Het resultaat voor de set van gewichten van het NMi, dat bestaat uit gewichten met nominale massa 1000 g, 500 g, 200 g (tweemaal) en 100 g (tweemaal), kan gegeneraliseerd worden naar sets die door andere massametrologieinstituten gebruikt worden. Het Duitse metrologieinstituut gebruikt bijvoorbeeld een set bestaande uit acht gewichten met 104 mogelijke combinaties. Het berekenen van de onzekerheid voor alle mogelijke schema's was te tijdrovend om binnen de studiegroep door te rekenen. Echter, gebaseerd op de inzichten met de Nederlandse weegschema's werd er besloten om alleen de weegvergelijkingen mee te nemen waarbij de testset uit een enkel gewicht bestond. Het optimale schema in deze vereenvoudigde setting had een onzekerheid die ongeveer 28% kleiner was dan die van het corresponderende schema in gebruik.

Conclusie

Het door het NMi gebruikte weegschema is suboptimaal. Door over te gaan naar een ander weegschema, kan de onzekerheid in de massa's van de nationale standaardgewichten gereduceerd worden met ongeveer 63%. Dit weegschema gebruikt echter meer metingen dan het huidige schema. Indien de hoeveelheid werk gelijk gehouden wordt, dan kan er een reductie van 28% gerealiseerd worden.

Het onderzoek naar het optimale weegschema is uitgevoerd door Sandjai Bhulai, Thomas Breuer, Eric Cator en Fieke Dekkers. Onze dank gaat uit naar Inge van Andel van het NMi voor de door haar geleverde informatie.

Tot slot

Er zullen proceedings van de studiegroep verschijnen waarin de problemen met hun oplossingen beschreven worden. Inmiddels is de studiegroep in Eindhoven gehouden, van 30 januari tot en met 3 februari. Geïnteresseerden kunnen meer informatie vinden op de website: http://www.win.tue.nl/swi2006/.

Sandjai Bhulai, Vrije Universiteit, Amsterdam
Corrie Quant, Vrije Universiteit, Amsterdam