Oefenentamen
Wiskundige Analyse I

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit, Amsterdam

Datum: 24-05-2005

Alle antwoorden moeten zorgvuldig worden beargumenteerd. Geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad. Deze opgaven zijn uiteraard slechts ter indicatie; het tentamen kan opgaven over andere delen van de stof bevatten.

(1) Onderzoek de volgende oneigenlijke integralen op convergentie dan wel divergentie.

(a)
$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^{3/2}}\, e^{-t}\, dt.$$

(b)
$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{3/2}}\, e^{-t}\, dt.$$

(c)
$$\int_0^2 \frac{\ln(1+t^2)}{t^2\sqrt{2t-t^2}}\, dt.$$

(2) (a) Gebruik de subsitutie $u = \pi - x$ om het volgende te bewijzen:
$$\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\, dx.$$
Hierbij is f een willekeurige Riemannintegreerbare functie.

(b) Concludeer hieruit dat
$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

(3) Zij $k \in \mathbb{N}$ en $a \in (0,1)$.

(a) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^\infty n^k a^n$ convergent is.

(b) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$.

(4) Zij (X, d) een metrische ruimte met dichte deelverzameling D. Bewijs dat elke niet-lege open deelverzameling O van X geschreven kan worden als vereniging van elementen van de collectie
$$\mathcal{B} = \{B(d, r) : d \in D, r \text{ rationaal}\}.$$

Z.O.Z

(5) Laat zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$$

uniform convergent is op elk interval van de vorm $[0, b]$, waarbij $b \geq 0$.

Normering								
1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4	5
2	3	4	6	6	6	2	9	7

$$\text{eindcijfer} = \frac{\#\ \text{punten} + 5}{5}.$$