Beknopte uitwerking oefententamen Afdeling Wiskunde
Wiskundige Analyse I Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit, Amsterdam

Datum: 24-05-2005

(1) (a) Merk op dat $\frac{\sin t}{t^{3/2}}e^{-t} \sim t^{-1/2}$ in de buurt van 0. Daar $\int_0^1 t^{-1/2}\,dt$ convergent is, is ook $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^{3/2}}\,e^{-t}\,dt$ convergent

(b) Op $[1,\infty]$ geldt dat $|\sin t\, e^{-t}| \leq e^{-1}$. D.w.z.,

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin t}{t^{3/2}}\,e^{-t}\right|\,dt \leq e^{-1}\int_1^\infty \frac{1}{t^{3/2}}\,dt < \infty.$$

(c) We splitsen de integraal bij 1.

- Merk op dat $\frac{\ln(1+t^2)}{t^2\sqrt{2t-t^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ in de buurt van 0. Daar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ convergent is, geldt dat ook voor $\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t^2\sqrt{2t-t^2}}\,dt$.
- Verder geldt dat $\frac{\ln(1+t^2)}{t^2\sqrt{2t-t^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2-t}}$ in de buurt van 2. Dus ook $\int_1^2 \frac{\ln(1+t^2)}{t^2\sqrt{2t-t^2}}\,dt$ is convergent.

(2) De substitutie $u = \pi - x$ levert $du = -x\,dx$. Daar $\sin(\pi - x) = \sin x$, krijgen we

$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi xf(\sin x)\,dx &= -\int_\pi^0 (\pi-u)f(\sin(\pi-u))\,du \\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin u)\,du - \int_0^\pi uf(\sin u)\,du \\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx - I, \end{aligned}$$

waaruit het gestelde ogenblikkelijk volgt. Daar $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, volgt met dit resultaat en de substitutie $u = \cos x$, dat

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-du}{1+u^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1} u\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

(3) Merk op dat

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k a^{n+1}}{n^k a^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k a \longrightarrow a \qquad (n \to \infty).$$

De reeks is dus convergent. Uit Stelling 2.20 volgt nu dat $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$.

(4) Kies een willekeurige $x \in O$. Er bestaat $\varepsilon > 0$ zodat $B(x,\varepsilon) \subseteq O$ (hier gebruiken we dat O open is). Daar D dicht is, is er een element $d \in D$ met $d \in B(x, {}^1\!/_2\varepsilon)$. Zij $\delta = d(x,d)$. Dan $\delta < {}^1\!/_2\varepsilon$, en dus bestaat er een rationaal getal r met $\delta < r < {}^1\!/_2\varepsilon$. Dan $x \in B(d,r)$, en $B(d,r) \subseteq B(x,\varepsilon)$ (uit de driehoeksongelijkheid).

(5) Als $x \in [0, b]$, dan $|nx^2/(n^3 + x^3)| \leq na^2/n^2 = a^2/n^2$. Daar $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ convergent is, volgt de uniforme convergentie van de gegeven reeks op $[0, b]$ uit Weierstrass.