Tentamen | Afdeling Wiskunde
Inleiding Partiële Differentiaalvergelijkingen | Faculteit der Exacte Wetenschappen
voor studenten Wiskunde en Natuurkunde | Vrije Universiteit Amsterdam

Datum: dinsdag 16 december 2003, 10:30–13:30 (3 uur)
Beantwoordingsinstructie: 4 opgaven; *alle antwoorden beargumenteren.*
Geen rekenmachine, geen open boek, wel formuleblad.

---

1. (a) Los de vergelijking
$$yu_x + xu_y = 0$$
op.
(b) Vind de oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarde $u(0, y) = e^{-y^2}$.

2. Beschouw de vierde orde vergelijking
$$u_t = -u_{xxxx}, \qquad x \in [0, 1],$$
met beginwaarde $u(0, x) = f(x) \in C^0([0, 1])$ en randvoorwaarden $u(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = 0$ en $u(t, 1) = u_{xx}(t, 1) = 0$.
(a) Geef de algemene oplossing m.b.v. scheiden van variabelen.
(b) Geef de formules voor de Fouriercoëfficienten in termen van de beginfunctie f.
(c) Zij $f(x) = 1$ op $[0, 1]$. Bereken de oplossing.
(d) Bewijs dat $\lim\limits_{t\to\infty} u(t, x) = 0$ voor alle $x \in [0, 1]$.

3. Beschouw the warmtevergelijking met dissipatie
$$u_t = u_{xx} - u_x, \qquad x \in \mathbb{R},$$
Beschouw de bovenstaande vergelijking op $D = \mathbb{R} \times (0, T)$ met als begin- en randvoorwaarden $u(0, x) = f(x)$ en $\lim_{x\to\pm\infty} u(x, t) = 0$.
(a) Vind de fundamentele oplossing E voor de geadjungeerde vergelijking.
(b) Leid de Greense identiteit voor de differentiaaloperator $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}$ en laat zien dat E de Greense functie is voor het bovenstaande probleem.
(c) Leid een formule af voor de oplossing $u(x, t)$ met beginvoorwaarde $f(x)$.

4. Laat $u(x, y)$ een harmonische functie zijn op de schijf $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$ ($\Delta u = 0$). Op de rand ∂D is u voorgeschreven (in poolcoordinaten) als $u|_{\partial D} = \sin^2 \theta$.
(a) Laat zien dat het maximum van u in $\overline{D}$ op de rand ligt en bereken het maximum van u.
(b) Bepaal de waarde van u in de oorsprong.
(c) Bereken u (hint: gebruik scheiden van variabelen in poolcoordinaten).

Succes