Uitwerking tentamen 26 augustus 2004

1. Duidelijk is dat $g(0) = f(0) - f(0) = 0$ en $g(1) = f(1) - f(1) = 0$ en g is differentieerbaar met afgeleide $g'(x) = f'(x) - 2xf'(x^2)$. De middelwaardestelling impliceert onmiddellijk het bestaan van een $c \in (0,1)$ zodat $g'(c) = 0$, oftewel $f'(c) = 2cf'(c^2)$.

2. Bewijs uit het ongerijmde. Stel $\lim_{x\to\infty} f'(x) = C \neq 0$. Bekijk eerst het geval $C > 0$. Kies $\varepsilon = C/2$ in de definitie van de limiet, dan is er een $K > 0$ zodat $|f'(x) - C| < \frac{C}{2}$ en dus $f'(x) > \frac{C}{2}$ voor alle $x > K$. Omdat f' continu en dus integreerbaar is, volgt er dat $f(x) = f(K) + \int_K^x f'(s)ds > f(K) + \frac{C}{2}(x - K)$ en dus $f(x) \to \infty$ als $x \to \infty$, maar gegeven is dat f begrensd is, een tegenspraak. Net zo laat je zien dat als $C < 0$, dan $f(x) \to -\infty$ als $x \to \infty$, alweer een tegenspraak. Dus $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

3. Bekijk eerst f op de gehele getallen, oftewel $|f(n) - f(m)| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ voor $n, m \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat $a_n = f(n)$ een Cauchyrij is (kies $N > 1/(2\varepsilon)$, dan is $|a_n - a_m| < \varepsilon$ voor $n, m \geq N$) en dus convergent. Zeg $a_n \to \alpha$ als $n \to \infty$. Laat $\bar{x}$ het kleinste gehele getal zijn groter dan of gelijk aan x. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, dan geldt
$$|f(x) - \alpha| = |f(x) - f(\bar{x}) + f(\bar{x}) - \alpha| \leq |f(x) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - \alpha|,$$
en $|f(\bar{x}) - \alpha| < \varepsilon$ voor $\bar{x} > N_\varepsilon$ voor voldoende grote keuze van N_ε, terwijl $|f(x) - f(\bar{x})| \leq 1/x + 1/\bar{x} < \varepsilon$ voor $x > 2/\varepsilon$. Dus $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ voor voldoende grote x, dus $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$.

4. Na het nemen van logaritmes volgt dat $b_0 = 0$ en $b_{n+1} = b_n + \log(1 + \frac{1}{n^2})$. We zien dat $b_{n+1} = \sum_{k=1}^n \log(1 + \frac{1}{k^2})$. Deze reeks convergeert, want $0 \leq \log(1 + \frac{1}{k^2}) \leq \frac{1}{k^2}$, dus convergentie volgt uit het vergelijkingscriterium (want $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ convergeert). Omdat b_n convergeert convergeert ook $a_n = \exp b_n$, want de exponent is een continue functie.

5. (a) Om het criterium van Leibniz toe te passen op de reeks $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n b_n$ met $b_n = \frac{1}{(-1)^n + 3n}$, moeten we laten zien dat b_n naar 0 daalt als $n \to \infty$. Het is duidelijk dat $b_n \to 0$, $b_n > 0$ en $b_{n+1} < b_n$, want $\frac{1}{b_{n+1}} = (-1)^{n+1} + 3(n+1) = 3 + (-1)^{n+1} + 3n > 1 + 3n \geq (-1)^n + 3n = \frac{1}{b_n}$. Dus het volgens het criterium van Leibniz convergeert de reeks.
(b) Voor $|x| > 1$ geldt $|\frac{x^{3n}}{x^n + 3n}| \to \infty$, dus de termen gaan niet naar 0, dus de reeks is divergent. Voor $|x| < 1$ geldt $|\frac{x^{3n}}{x^n+3n}| \leq \frac{|x|^{3n}}{3n-1} \leq |x^3|^n$ en de meetkundige reeks $\sum |x^3|^n$ convergeert voor $|x| < 1$, dus de reeks convergeert absoluut. Voor $x = 1$ wordt de reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+3n}$ en dat is een harmonische reeks en die is divergent. Voor $x = -1$ tenslotte is de reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(-1)^n+3n}$ en die is convergent volgens onderdeel (a).

6. De functies $f_n(x) = \frac{n(\ln x)^2}{nx+1}$ convergeren op $[1, e^2]$ uniform naar $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$, want
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{(\ln x)^2}{x(nx+1)}\right| \leq \frac{(\ln e^2)^2}{n+1} \qquad \text{voor } x \in [1, e^2],$$
dus
$$\|f_n - f\| = \sup_{[1,e^2]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{4}{n+1} \to 0 \qquad \text{als } n \to \infty.$$
Dan mag je de limiet en integraal verwisselen:
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{e^2} f_n = \int_1^{e^2} \lim_{n\to\infty} f_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^{e^2} = \frac{8}{3}.$$

7. We bekijken de verzameling van positieve continue functies

$$C_0 = \{f \in C([0,1]), f(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in [0,1]\}.$$

Deze ruimte is compleet (gesloten deelverzameling van de ruimte van continue functies). De afbeelding $Tf(x) = x + \int_0^{1-x} \sqrt{1+f(s)}ds$ beeldt C_0 in zichzelf af (de integraal is continu en $x \in [0,1]$). Bovendien is T een contractie op C_0. Immers, voor $y, z \geq 0$:

$$|\sqrt{1+y} - \sqrt{1+z}| = \left| \int_y^z \frac{1}{2\sqrt{1+s}} ds \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_y^z ds \right| = \frac{1}{2}|y-z|,$$

dus (neem $y = f(s)$ en $z = g(s)$)

$$\int_0^{1-x} |\sqrt{1+f(s)} - \sqrt{1+g(s)}| ds \leq \int_0^{1-x} \frac{1}{2}|f(s)-g(s)|ds \leq \frac{1}{2}\|f-g\|(1-x) \leq \frac{1}{2}\|f-g\|,$$

en er volgt dat

$$\begin{aligned} \|Tf - Tg\| &= \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^{1-x} \sqrt{1+f(s)} - \sqrt{1+g(s)} ds \right| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^{1-x} \left| \sqrt{1+f(s)} - \sqrt{1+g(s)} \right| ds \leq \frac{1}{2}\|f-g\|. \end{aligned}$$

De Banach contractie stelling zegt dat er dus precies één fixpunt van T in C_0 is, oftewel precies één positieve continue oplossing van de gegeven integraalvergelijking.