

1. De functie f is differentieerbaar op het interval en de afgeleide is nul want, voor alle x in het interval geldt

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq M \frac{|x+h-h|^a}{|h|} = M|h|^{a-1} \rightarrow 0 \quad \text{als } h \rightarrow 0.$$

(We hebben gebruikt dat $a > 1$, en als x een randpunt is moeten we $h > 0$ of $h < 0$ nemen.) Omdat $f' = 0$ volgt nu dat f een constante is.

2. Bekijk eerst $d = 0$. De functie f is differentieerbaar, dus zeker continu op $[a, b]$. Een continue functie op een gesloten interval neemt zijn minimum aan, zeg in $c \in [a, b]$. Omdat $f'(a) < 0$ en $f'(b) > 0$ wordt het minimum niet op de rand aangenomen, dus $c \in (a, b)$. In het minimum is de afgeleide gelijk aan 0, oftewel $f'(c) = 0 = d$.

Als $d \neq 0$, bekijk dan de functie $g(x) = f(x) - dx$. Voor g geldt: g is differentieerbaar op $[a, b]$ (som van differentieerbare functies) met $g' = f' - d$, dus $g'(a) < 0 < g'(b)$. Op g kunnen we het voorafgaande toepassen en dit geeft een $c \in (a, b)$ zodat $g'(c) = 0$ en dus $f'(c) = d$.

3. Er is een punt zodat $f'(x) \neq 0$, want anders zou $f'' = 0$ op heel $\mathbb{R}$. Noem dit punt x_0 . Er zijn twee mogelijkheden: $f'(x_0) > 0$ of $f'(x_0) < 0$. Bekijk eerst het geval $f'(x_0) > 0$, dan is $f'(x) \geq f'(x_0)$ voor alle $x > x_0$, immers $f'(x) - f'(x_0) = \int_{x_0}^x f''(s) ds \geq 0$ voor alle $x > x_0$ (f'' is continu, dus integreerbaar; je zou ook de middelwaarde stelling kunnen gebruiken). Dan geldt

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(s) ds \geq f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(x_0) ds = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] \rightarrow \infty \quad \text{als } x \rightarrow \infty,$$

want $f'(x_0) > 0$.

In het geval $f'(x_0) < 0$ kunnen we hetzelfde argument voor $x < 0$ gebruiken om te laten zien dat $f(x) \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow -\infty$, oftewel f is onbegrensd.

4. Bekijk de functie $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$. Deze functie is gedefinieerd op $[0, \frac{1}{2}]$ en is op dat interval continu (een samenstelling van continue functies). We zijn op zoek naar een nulpunt van g , want als $g(c) = 0$, dan $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. Er geldt dat

$$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = -g(\frac{1}{2}).$$

Als $g(0) = 0$, dan $g(\frac{1}{2}) = 0$, dus dan kiezen we $c = \frac{1}{2}$. Als $g(0) > 0$, dan $g(\frac{1}{2}) < 0$ en met behulp van de tussenwaardestelling vinden we een $c \in (0, \frac{1}{2})$ zodat $g(c) = 0$. Als $g(0) < 0$, dan $g(\frac{1}{2}) > 0$ en we vinden c weer met de tussenwaardestelling.

5. Definieer $a_n = \frac{x^n}{x^{2n} + n}$.

Voor $|x| > 1$ geldt $x^{2n} + n \geq x^{2n}$, dus $|a_n| \leq |x|^{-n}$. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (|x|^{-1})^n$ is de meetkundige reeks, dus convergent (voor $|x| > 1$). Met behulp van het vergelijkings criterium zien we dat $\sum a_n$ absoluut convergent is, dus zeker convergent.

Voor $|x| < 1$ geldt $x^{2n} + n \geq n \geq 1$, dus $|a_n| \leq |x|^n$. De meetkundige reeks $\sum |x|^n$ convergeert voor $|x| < 1$, dus $\sum a_n$ convergeert weer absoluut.

Voor $x = 1$ wordt de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ en dat is de harmonische reeks en die is divergent.

Voor $x = -1$ tenslotte is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ en die is convergent volgens het criterium van Leibniz.

6. $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_2 = -\frac{5}{16}$, $a_3 = \frac{39}{256}$. De afbeelding $f(x) = \frac{1}{4} - x^2$ beeldt $[0, \frac{1}{4}]$ af in $[0, \frac{1}{4}]$. Bovendien is f een contractie op dat gesloten interval, want

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x+y)|x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y| \quad \text{voor alle } x, y \in [0, \frac{1}{4}].$$

Volgens de Banach contractie stelling heeft de afbeelding $f(x)$ precies één fixpunt in $[0, \frac{1}{4}]$. Noem dit fixpunt α : $f(\alpha) = \alpha$. De Banach contractiestelling zegt ook dat elke rij $(f^n(x))_{n=0}^\infty$ met startpunt $x \in [0, \frac{1}{4}]$ convergeert naar x_0 , oftewel $a_n \rightarrow \alpha$ als $n \rightarrow \infty$, want $a_3 \in [0, \frac{1}{4}]$. De rij a_n is dus convergent en de limiet α kunnen we uitrekenen door $f(\alpha) = \alpha$ op te lossen: $\frac{1}{4} - \alpha^2 = \alpha$, oftewel

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}.$$

7. De functies $f_n(x) = \frac{x + \exp(x/n)}{x^2 + 1}$ convergeren op $[0, 1]$ uniform naar $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, want

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{e^{x/n} - 1}{x^2 + 1} \right| \leq e^{1/n} - 1,$$

dus

$$\|f_n - f\| = \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq e^{1/n} - 1 \rightarrow 0 \quad \text{als } n \rightarrow \infty.$$

Dan mag je dus de limiet en integraal verwisselen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan(x) \right]_0^1 = \frac{2 \ln(2) + \pi}{4}.$$

8. Elke oplossing is natuurlijk positief. Dus bekijk de verzameling

$$C_0 = \{f \in C([0, 1]), f(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in [0, 1]\}.$$

Deze ruimte is compleet (gesloten deelverzameling van de ruimte van continue functies). De afbeelding $Tf(x) = 1 + \int_{x/2}^x \exp(-f(s)) ds$ beeldt C_0 in zichzelf af (de integraal is continu en x en positief). Bovendien is T een contractie op C_0 . Immers, voor $y, z \geq 0$:

$$|e^{-y} - e^{-z}| = \left| \int_y^z e^{-s} ds \right| \leq \left| \int_y^z ds \right| = |y - z|,$$

dus

$$\int_{x/2}^x |e^{-f(s)} - e^{-g(s)}| ds \leq \int_{x/2}^x |f(s) - g(s)| ds \leq \frac{x}{2} \|f - g\| \leq \frac{1}{2} \|f - g\|,$$

dus

$$\|Tf - Tg\| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_{x/2}^x e^{-f(s)} - e^{-g(s)} ds \right| \leq \sup_{x \in [0,1]} \int_{x/2}^x |e^{-f(s)} - e^{-g(s)}| ds \leq \frac{1}{2} \|f - g\|.$$

De Banach contractie stelling zegt dat er dus precies één fixpunt van T in C_0 is, oftewel precies één oplossing van de gegeven integraalvergelijking.