

Uitwerking tentamen 11 november 2004

1. De eerste bewering is onwaar. Een tegenvoorbeeld is $f(x) = \arctan x$, of $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Beide functies hebben strict positieve afgeleide en zijn begrensd.

De tweede bewering is waar. Uit $f'(x) > 1/x$ voor $x \geq 1$ volgt dat voor $x > 1$

$$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(s) ds > f(1) + \int_1^x \frac{ds}{s} = f(1) + \ln x.$$

Dus $f(x) \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$, oftewel f is onbegrensd.

2. Bekijk $h(x) = f(x) - g(x)$. Dan is $h \in C([0, 1])$ en $h(0) = f(0) - g(0) = g(1) - f(1) = -h(1)$. Als $h(0) = 0$ dan voldoet $c = 0$ (en $c = 1$). Als $h(0) \neq 0$ dan volgt uit de tussenwaardestelling dat er een $c \in (0, 1)$ bestaat zodat $h(c) = 0$, oftewel $f(c) = g(c)$.

Bekijk $j(x) = f(x) + g(x)$. Dan is $j \in C^1([0, 1])$ en $j(0) = f(0) + g(0) = g(1) + f(1) = j(1)$. Dus volgt uit de stelling van Rolle dat er een $d \in (0, 1)$ is zodat $j'(d) = 0$, oftewel $f'(d) + g'(d) = 0$. Hetzelfde argument gaat op voor de functie $i(x) = f(x)g(x)$, want $i(0) = f(0)g(0) = g(1)f(1) = i(1)$. Volgens Rolle is er een $e \in (0, 1)$ is zodat $i'(e) = 0$, oftewel $f'(e)g(e) + f(e)g'(e) = 0$.

3. Gebruik in de tweede integraal de substitutie $y = f(x)$. Dan krijg je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b x f'(x) dx = \int_a^b f(x) + x f'(x) dx \\ &= \int_a^b (x f(x))' dx = [x f(x)]_a^b = b f(b) - a f(a). \end{aligned}$$

Je kunt na de substitutie eventueel ook partiël integreren gebruiken.

4. Bekijk de afbeelding $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{9x}$ op het interval $I = [\frac{1}{2}, 1]$. Dan beeldt f het interval I in zichzelf af (want $f(\frac{1}{2}) = \frac{13}{18}$ en $f(1) = \frac{11}{18}$ en f is dalend. Bovendien is f op I een contractie want $|f(y) - f(x)| = |\frac{x-y}{9xy}| \leq \frac{4}{9}|x-y|$. Dus $f(x) = x$ heeft precies één oplossing in I en elke rij gegeven door $b_n = f(b_{n-1})$ die in I begint (en $b_1 = 1$, dus dat is zo) convergeert naar deze oplossing. We lossen $f(x) = x$ op: $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{9} = (x - \frac{2}{3})(x + \frac{1}{6}) = 0$ met de abc-formule. Dus $b_n \rightarrow \frac{2}{3}$ als $n \rightarrow \infty$.

Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_n}{a_{n-1}}| = \frac{2}{3} < 1$ volgt uit de ratiotest dat de reeks convergeert.

5. Voor $x < 0$ geldt dat $\frac{x^{2n}}{e^{nx} + n} \sim \frac{x^{2n}}{n}$. Dit is een bekende reeks, en we zien (eventueel met de ratiotest) dat de reeks divergeert voor $x < -1$ en convergeert voor $x \in (-1, 0)$. Voor $x = -1$ is dit de harmonische reeks en die divergeert.

Voor $x = 0$ is de reeks identiek nul dus convergent.

Voor $x > 0$ bepalen we eerst het maximum van $f(x) = x^2 e^{-x}$: $0 = f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, dus het maximum is $f(2) = 4e^{-2}$. Verder volgt dat $\frac{x^{2n}}{e^{nx} + n} \sim \frac{x^{2n}}{e^{nx}} = (x^2 e^{-x})^n$. Dit is de meetkundige reeks in vermomming en omdat $x^2 e^{-x} \leq 4e^{-2} < 1$ voor $x > 0$ convergeert de reeks dus.

Conclusie: convergent voor $x > -1$, divergent voor $x \leq -1$.

6. De functies $f_n(x) = \frac{n \cos x + \cos nx}{4n + 2n \sin x}$ convergeren op $[-\pi/2, \pi/2]$ uniform naar $f(x) = \frac{\cos x}{4 + 2 \sin x}$, want

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\cos nx}{4n + 2n \sin x} \right| \leq \frac{1}{2n} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R},$$

dus

$$\|f_n - f\| = \sup_{[-\pi/2, \pi/2]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{als } n \rightarrow \infty.$$

Dan mag je de limiet en integraal verwisselen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{4 + 2 \sin x} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(4 + 2 \sin x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \ln 3.$$