

Voorbeelduitwerking oefententamen

1. (a) Omdat f' continu is, is f' begrensd, dus er is een $M > 0$ zodat $|f'(x)| < M$ voor alle $x \in [a, b]$. Nu: $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t) dt \leq M|x - y|$ (absolute waarde, want de integratie grenzen kunnen “verkeerd om” staan). Net zo: $f(y) - f(x) \leq M|y - x|$. Dus: $|f(x) - f(y)| < M|x - y|$.
- (b) Omdat $f > 0$ is kunnen we de stelling toepassen die zegt dat als f differentiëerbaar is en $f > 0$ dan is ook $1/f$ differentiëerbaar. Ook geldt dat het product van differentiëerbare functies weer differentiëerbaar is, dus $\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{f} = g$ is differentiëerbaar. De afgeleide kunnen we uitrekenen met de kettingregel: $g'(x) = -2f'(x)/(f(x))^3$. Omdat f differentiëerbaar is, is f continu, dus ook $1/f$ is continu, en f' is continu (bij aanname), dus we concluderen dat $g'(x)$ het product van continue functies is, dus g' is continu, oftewel g is continu differentiëerbaar.
- (c) Omdat f continu is, is ook f^2 continu, dus de primitieve $G(y) = \int_a^y (f(t))^2 dt$ bestaat en $G'(y) = (f(y))^2$. Omdat $h(x) = G(x^2)$ kunnen we de kettingregel toepassen: $h'(x) = 2xG'(x^2) = 2x(f(x^2))^2$. Nogmaals de kettingregel toepassen geeft: $h''(x) = 2(f(x^2))^2 + 8x^2 f(x)f'(x)$.
- (d) F is op $(0, 1]$ continu omdat F daar de samenstelling is van continue functies. Om continuïteit in 0 te controleren berekenen we $\lim_{x \downarrow 0} F(x) = \lim_{x \downarrow 0} x^2 \sin(1/x) = 0$, want de sinus is in absolute waarde kleiner dan 1. We zien dat $\lim_{x \downarrow 0} F(x) = F(0)$, dus F is ook continu in 0, dus F is continu op $[0, 1]$. De afgeleide van F is $2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ voor $x > 0$. In het punt $x = 0$ gebruiken we de definitie: $F'(0) = \lim_{h \downarrow 0} (F(h) - F(0))/h = \lim_{h \downarrow 0} h \sin(1/h) = 0$ (we bedoelen hier natuurlijk de rechter afgeleide). Dus:

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{voor } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Dus F is differentiëerbaar op $[0, 1]$. Maar $\lim_{x \downarrow 0} F'(x)$ bestaat niet, dus $F'(x)$ is niet continu in $x = 0$, dus F is niet continu differentiëerbaar op $[0, 1]$.

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{2n}}{(1+x^2)} = \frac{2}{(1+x^2)} \sum_{n=1}^{\infty} n(x^2)^n$. Die reeks is divergent voor $|x| \geq 1$ want dan gaan de termen niet naar nul. De machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} ny^n$ heeft convergentiestraal $R = 1$ want $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Dus met de substitutie $y = x^2$ zien we dat de oorspronkelijke reeks convergent is voor $-1 < x < 1$.
- (b) Met de substitutie $y = -e^{-x}$ krijgen we $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$. De convergentiestraal van die machtreeks is $R = 1$ want $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, dus de reeks is convergent voor $|y| < 1$ en divergent voor $|y| > 1$. Het speciale geval $y = -1$ is convergent ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ is absoluut convergent, dus convergent) en $y = 1$ geeft ook een convergente reeks maar dat is irrelevant want $y = -e^{-x} < 0$. Vertalen we dit naar x , dan zien we dat de reeks convergent is voor $x \geq 0$ en divergent voor $x < 0$.
- (c) Voor (a): we kunnen het criterium gebruiken dat de reeks uniform convergeert dan en slechts dan als voor elke $\varepsilon > 0$ er een N is zodat $\|\sum_{k=n}^m \frac{2kx^{2k}}{(1+x^2)}\| < \varepsilon$ voor alle $m > n > N$. Maar $\sup_{x \in (-1,1)} \sum_{k=n}^m \frac{2kx^{2k}}{(1+x^2)} \geq \sum_{k=n}^m k$, want laat x naar 1 naderen. Dus $\|\sum_{k=n}^m \frac{2kx^{2k}}{(1+x^2)}\|$ wordt niet klein voor grote n en m , dus de convergentie is niet uniform.
 Voor (b): we kunnen de stelling gebruiken die zegt dat als $\|f_n\| \leq M_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergeert dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform. In dit geval $f_n = (-1)^n e^{-nx}/n^2$, dus op het interval van convergentie $[0, \infty)$ geldt: $\|f_n\| = 1/n^2$. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert, is de convergentie van de functiereeks dus uniform op $[0, \infty)$.

3. (a) De limietfunctie is $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = xe^{-x^2}$. De afstand

$$\|f_n - f\| = \|e^{-x^2}(\frac{nx^2}{1+nx} - x)\| = \|e^{-x^2}\frac{x}{1+nx}\| = \sup_{[0,\infty)} |e^{-x^2}\frac{x}{1+nx}| \leq \sup_{[0,\infty)} |\frac{x}{1+nx}|$$

want die exponent is kleiner dan 1. Het supremum van $\frac{x}{1+nx}$ op $[0, \infty)$ bepalen we zo: de afgeleide is $\frac{1}{(1+nx)^2}$ en die is positief, dus $\frac{x}{1+nx}$ is stijgend, dus $\sup_{[0,\infty)} \frac{x}{1+nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+nx} = 1/n$. Al met al vinden we dat $\|f_n - f\| \leq 1/n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, dus de convergentie is uniform.

- (b) Met de substitutie $y = x^2$ (dus $dy = 2xdx$) vinden we

$$\int xe^{-x^2} dx = \int \frac{1}{2}e^{-y} dy = -\frac{1}{2}e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Met behulp van partiëel integreren en de bovenstaande integraal vinden we

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-x^2}.$$

- (c) We laten eerst zien dat $(1-x^2)f_n$ uniform naar $x(1-x^2)e^{-x^2}$ convergeert op $[0, y]$ voor $y > 0$ willekeurig. Duidelijk is dat $\|f_n(x) - xe^{-x^2}\| \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ voor elk interval $[0, y]$ (want op zelfs op $[0, \infty)$, zie onderdeel (a)). Verder hebben we geleerd dat geldt: $\|(1-x^2)f_n(x) - x(1-x^2)e^{-x^2}\| \leq \|(1-x^2)\| \cdot \|f_n(x) - xe^{-x^2}\|$ (en $\|1-x^2\| = \max\{1, y^2-1\}$). Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1-x^2)f_n(x) - x(1-x^2)e^{-x^2}\| \leq \|(1-x^2)\| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - xe^{-x^2}\| = 0$, dus die convergentie is inderdaad uniform op $[0, y]$. We mogen daarom de limiet en de integraal verwisselen. Dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^y (1-x^2)f_n = \int_0^y \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x^2)f_n = \int_0^1 x(1-x^2)e^{-x^2} = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} \Big|_0^y = \frac{y}{2}e^{-y^2},$$

waarbij we onderdeel (b) hebben gebruikt. Tenslotte, $\lim_{y \rightarrow \infty} [\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^y (1-x^2)f_n(x) dx] = \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{2}e^{-y^2} = 0$.