

Oefententamen

Wiskundige Analyse voor studenten Econometrie
geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad
Alle antwoorden moeten worden toegelicht.

*Deze opgaven zijn uiteraard slechts ter indicatie;
het tentamen kan opgaven over andere delen van de stof bevatten.*

1. Een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heet *continu differentiëerbaar* als f differentiëerbaar is en de afgeleide f' continu is op $[a, b]$.

(a) We bekijken een continu differentiëerbare functie f . Bewijs dat er een $M > 0$ bestaat zodat $|f(x) - f(y)| < M|x - y|$ voor alle x en y in $[a, b]$.

(b) Neem aan dat f continu differentiëerbaar is en dat $f(x) > 0$ op $[a, b]$. We definiëren $g(x) = 1/(f(x))^2$. Laat zien dat $g(x)$ differentiëerbaar is en dat $g'(x)$ continu is op $[a, b]$.

(c) Voor een continu differentiëerbare functie f definiëren we $h(x) = \int_a^{x^2} (f(t))^2 dt$. Bepaal de tweede afgeleide $h''(x)$.

(d) Gegeven is de functie

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{voor } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Bepaal of F continu is op $[0, 1]$. Bepaal of F differentiëerbaar is op $[0, 1]$. Bepaal of F continu differentiëerbaar is op $[0, 1]$.

2. Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de volgende reeksen convergeren:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{2n}}{(1+x^2)}.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2}.$

(c) Bepaal of de functiereeksen bij (a) en (b) *uniform* convergent zijn op hun hele interval van convergentie.

3. Bekijk $f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-x^2}}{1+nx}.$

(a) Bepaal de limietfunctie $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ en toon aan dat de convergentie van f_n naar f uniform is op $[0, \infty)$.

(b) Bepaal de primitieven

$$\int x e^{-x^2} dx \quad \text{en} \quad \int x^3 e^{-x^2} dx$$

met behulp van substitutie en partiële integratie.

(c) Laat $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^y (1 - x^2) f_n(x) dx$. Bereken $g(y)$ en bepaal

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^y (1 - x^2) f_n(x) dx \right].$$