

Beoordeling: startwaarde is 0.5; elke goede opgave levert 1.5 punt op.

Beantwoordingsinstructie: 7 opgaven.

Geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad.

Alle antwoorden moeten zorgvuldig worden beargumenteerd.

1. Gegeven is een functie $f \in C^1([0, 1])$.

Bewijs dat er een $c \in (0, 1)$ bestaat zodat $f'(c) = 2cf'(c^2)$.

Aanwijzing: bekijk de functie $g(x) = f(x) - f(x^2)$.

2. De functie $f \in C^1(\mathbb{R})$ is begrensd en $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ bestaat.

Bewijs dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

3. Gegeven is een functie f , gedefinieerd op $(0, \infty)$, die voldoet aan $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Bewijs dat de limiet $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ bestaat.

Aanwijzing: laat eerst zien dat de rij a_n , gegeven door $a_n = f(n)$, convergent is.

4. De rij a_n is gegeven door $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = a_n(1 + \frac{1}{n^2})$ voor $n \geq 1$.

(a) Definiëer $b_n = \ln a_n$. Laat zien dat

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k^2}).$$

(b) Toon aan dat b_n convergeert.

(c) Toon aan dat a_n convergeert.

5. (a) Laat zien dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + 3n}$$

convergeert.

(Als je het criterium van Leibniz gebruikt, controleer dan wel de voorwaarden.)

(b) Bepaal voor alle $x \in \mathbb{R}$ of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{x^n + 3n}$$

convergent of divergent is.

6. Gegeven is de rij

$$a_n = \int_1^{e^2} \frac{n(\ln x)^2}{nx + 1} dx.$$

Bepaal de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Aanwijzing: laat eerst zien dat de rij functies $f_n(x) = \frac{n(\ln x)^2}{nx+1}$ uniform convergeert op $[1, e^2]$.

7. Bewijs dat er precies één positieve continue functie f op $[0, 1]$ bestaat zodat

$$f(x) = x + \int_0^{1-x} \sqrt{1 + f(s)} ds.$$