Aanvulling aansluitingscursus wiskunde

A.C.M. Ran

In dit dictaat worden twee onderwerpen behandeld die niet in het boek voor de Aansluitingscursus staan. Die onderwerpen zijn: complexe getallen en volledige inductie. Er is geprobeerd zoveel mogelijk de stijl van het boek aan te houden. Bij het maken van dit dictaat heb ik veel gesprekken gevoerd met Jan Los, en die gesprekken zijn zeer waardevol geweest. Ik wil Jan hartelijk danken voor zijn bijdrage aan de totstandkoming van dit dictaat.

Complexe getallen

1. Invoering van complexe getallen

De vergelijking $x^2 = 2$ heeft geen rationale oplossingen. Er is dus geen breuk $\frac{p}{q}$ waarvan het kwadraat 2 is. Dat heeft er toe geleid dat we de getallen $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$ *invoerden* als de oplossingen van de vergelijking $x^2 = 2$. Getallen als $\sqrt{2}$, $3\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{37}$ zijn wel reele getallen, en ons inmiddels zeer vertrouwd, maar het zijn geen rationale getallen.
Waarom zouden we dan wel tevreden zijn met de vaststelling dat de vergelijking $x^2 = -1$ geen reele oplossingen heeft? Merk op dat de situatie geheel analoog is aan de vaststelling dat $x^2 = 2$ geen rationale oplossingen heeft. We voeren nu twee nieuwe, niet reele getallen in, die we i en $-i$ noemen via de *definitie* $i^2 = (-i)^2 = -1$.
Complexe getallen zijn alle getallen van de vorm $a + bi$, waar a en b reeel zijn. Dit soort getallen kom je op een natuurlijke manier tegen als je kwadratische vergelijkingen wilt oplossen.
We noteren de verzameling van de complexe getallen met $\mathbb{C}$.
Dus $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$.

2. Rekenen met complexe getallen

Een aantal berekeningen met complexe getallen, zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, gaan net zoals het gaat bij uitdrukkingen waar wortels in voorkomen. Nog even ter herhaling: als $a = 2 + 3\sqrt{2}$ en $b = 1 - 5\sqrt{2}$ dan

$$\begin{aligned}
a + b &= 3 - 2\sqrt{2} \\
a - b &= 1 + 8\sqrt{2} \\
a \cdot b &= (2 + 3\sqrt{2})(1 - 5\sqrt{2}) = 2 - 7\sqrt{2} - 15(\sqrt{2})^2 = -28 - 7\sqrt{2} \\
\frac{a}{b} &= \frac{2 + 3\sqrt{2}}{1 - 5\sqrt{2}} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{1 - 5\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + 5\sqrt{2}}{1 + 5\sqrt{2}} = \frac{32 + 13\sqrt{2}}{-49} = -\frac{32}{49} - \frac{13}{49}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Het rekenen met complexe getallen gaat nu op vergelijkbare wijze. Onthoud daarbij wel dat $i^2 = -1$.
Als voorbeeld: als $a = 3 + 2i$ en $b = -1 - i$, dan

$$\begin{aligned}
a + b &= 2 + i \\
a - b &= 4 + 3i \\
a \cdot b &= (3 + 2i)(-1 - i) = -3 - 5i - 2i^2 = -1 - 5i \\
\frac{a}{b} &= \frac{3 + 2i}{-1 - i} = \frac{(3 + 2i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} \frac{-5 + i}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Merk op: bij het delen geldt in beide gevallen dat om een term $x + by$ uit de noemer weg te halen, we teller en noemer vermenigvuldigen met $x - by$. Daarbij maken we dan gebruik van het feit dat $(x + by)(x - by) = x^2 - b^2y^2$.
Voor het complexe getal $z = x + yi$ noemen we het complexe getal $x - yi$ de *complex geconjugeerde* of *complex toegevoegde* van het getal z. We noteren dat getal met z met een streepje erboven: $\overline{z}$.
Voor het complexe getal $z = x + yi$ noemen we de reële getallen x en y, respectievelijk het *reële deel* en het *imaginaire deel* van z. Let op hier: het imaginaire deel van een complex getal is dus reëel!!! We noteren het imaginaire deel met $\Im z$, het reële deel met $\Re z$, dus $\Re z = x, \Im z = y$.

1.1 Los op middels kwadraatafsplitsen:

a. $x^2 - 8x + 7 = 0$ f. $x^2 + 12x + 11 = 0$
b. $x^2 - 2x - 3 = 0$ g. $x^2 - 6x + 4 = 0$
c. $x^2 + 6x + 4 = 0$ h. $x^2 + 6x + 2 = 0$
d. $x^2 + 4x + 2 = 0$ i. $x^2 + 22x + 100 = 0$
e. $x^2 - 10x + 7 = 0$ j. $x^2 + 14x + 14 = 0$

1.2 Los op (eventueel middels kwadraatafsplitsen):

a. $x^2 = -4$ f. $x^2 + 2x + 2 = 0$
b. $x^2 = -17$ g. $x^2 + 12x + 61 = 0$
c. $x^2 = -20$ h. $x^2 - 4x + 11 = 0$
d. $(x-2)^2 = -4$ i. $x^2 - 8x + 36 = 0$
e. $(x+7)^2 = -8$ j. $x^2 + 22x + 221 = 0$

2.1 Reken uit:

a. $(2 + 3\sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$ f. $\frac{2+3\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

b. $(-3 + 7\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2})$ g. $\frac{-3+7\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$

c. $(10 + 3\sqrt{7})(10 - 3\sqrt{7})$ h. $\frac{10+3\sqrt{7}}{1-2\sqrt{7}}$

d. $(3 + 4\sqrt{11})(4 + 3\sqrt{11})$ i. $\frac{3+4\sqrt{11}}{4-3\sqrt{11}}$

e. $(2 + 3\sqrt{12})(7 + 2\sqrt{3})$ j. $\frac{2+6\sqrt{3}}{7-2\sqrt{3}}$

2.2 Reken uit:

a. $(2+3i) + (1+5i)$ f. $i + 3i$ k. $\frac{2+3i}{1+5i}$ p. $\frac{2+i}{i}$

b. $(3-7i) - (1/2 + \pi i)$ g. $i^2 - (2i)^2$ l. $\frac{3-7i}{1+i}$ q. $\frac{i}{2+i}$

c. $(3-4i)(7+2i)$ h. $i(2-i)$ m. $\frac{3-4i}{7-2i}$ r. $\frac{2+3i}{2-3i}$

d. $(-1+2i)(3-5i)$ i. $(2+3i)^2$ n. $\frac{-1+2i}{3+5i}$ s. $\frac{(4-3i)^2}{(1+i)^2}$

e. $(-2+8i)(-2-8i)$ j. $(5-i)^2 - (5+i)^2$ o. $\frac{-2+8i}{7-i}$ t. $\frac{5-2i}{3i}$

2.3 Bepaal van de volgende complexe getallen de complex geconjugeerde, het reële deel en het imaginaire deel:

a. $3 + 2i$ d. $7 - i$
b. $-4 + 3i$ e. $11 - 8i$
c. $-\pi + \sqrt{2}i$ f. $\ln 2 + ei$

2.4 Als $z = 2 - 3i$ en $w = 1 + 2i$ bereken dan

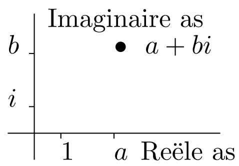
a. $z \cdot \bar{z}$ c. $\frac{a}{1-b}$
b. $\frac{1}{\bar{b}}$ d. $\bar{b} - \frac{i}{\bar{a}}$

3. Het complexe vlak, poolcoördinaten, modulus en argument

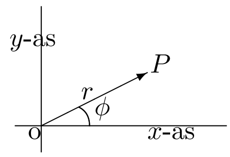
We identificeren een *complex getal* met een punt in het platte vlak:

$$x + iy \leftrightarrow (x, y)$$

waarbij we afspreken $i^2 = (-i)^2 = -1$. We identificeren dus 1 met (1,0) en i met (0,1).



We identificeren reële getallen x met $(x, 0)$. Getallen van de vorm iy heten *imaginaire getallen*, de verzameling $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$ heet de *imaginaire as.*
Punten in het platte vlak kun je ook met *poolcoördinaten* weergeven: elk punt P wordt eenduidig bepaald door de afstand r tot $(0, 0)$ en de hoek ϕ die het lijnstuk van P naar O maakt met de positieve x-as. Het paar (r, ϕ) zijn de poolcoördinaten van P, met de afspraak $-\pi < \phi \leq \pi$.



De relatie tussen de twee manieren waarop we nu naar een complex getal kunnen kijken is als volgt: wanneer $P = x + iy$ dan is

$$x = r \cos \phi \text{ en } y = r \sin \phi$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \phi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

- r heet de *modulus* van het complexe getal $z = x + iy$.
  Notatie: $r = |z|$.

- ϕ heet de *hoofdwaarde van het argument*van z.
  Notatie: $\phi = \mathrm{Arg} z$.

- Elke hoek waarvoor geldt $\phi = \mathrm{Arg} z + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ geeft in de formule die z uitdrukt in ϕ en r hetzelfde. We spreken van het *argument* van z als we ons niet langer beperken tot $-\pi < \phi \leq \pi$. Notatie: $\arg z$.

3.1 Bereken modulus en hoofdwaarde van het argument van de volgende getallen: (gebruik zonodig, maar alleen zonodig, je rekenmachine om de hoofdwaarde van het argument te bepalen)

a. $1+i$ e. $3+4i$
b. $1-\sqrt{3}i$ f. $7-24i$
c. $2i$ g. $-4-4i$
d. $-2\sqrt{3}+2i$ h. -7

3.2 Gegeven zijn de modulus en de hoofdwaarde van het argument van een aantal complexe getallen. Druk die getallen uit in de vorm $z = a + bi$.

a. $|z| = \sqrt{2}, \text{Arg}z = \frac{-\pi}{4}$ e. $|z| = 10, \text{Arg}z = \frac{2}{3}\pi$
b. $|z| = 4, \text{Arg}z = \frac{5}{6}\pi$ f. $|z| = 5, \text{Arg}z = -\frac{\pi}{3}$
c. $|z| = \frac{1}{2}, \text{Arg}z = \pi$ g. $|z| = 4, \text{Arg}z = \frac{\pi}{2}$
d. $|z| = 3\text{Arg} = -\frac{\pi}{2}$ h. $|z| = 0$

3.3 Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de volgende complexe getallen:

a. $z_1 = -3$ c. $z_2 = 1+i$
b. $z_3 = 2i$ d. $z_4 = -\sqrt{3} - i$

Bepaal van elk van deze getallen z het reele deel, het imaginaire deel, de modulus en de hoofdwaarde van het argument.

3.4 Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de complexe getallen $z_1 = 2+i$, en $z_2 = 1+2i$. Bereken de volgende getallen en teken hun beeldpunten in het complexe vlak:

a. $z_1 + z_2$ c. $z_1 - z_2$
b. $z_1 \cdot z_2$ c. $\frac{z_1}{z_2}$

3.5 Teken in het complexe vlak het beeldpunt van een willekeurig complex getal z. Geef vervolgens aan waar de beeldpunten liggen van:

a. $\frac{1}{z}$ d. $\bar{z}$
b. $-z$ e. $i\bar{z}$
c. iz

4. Vermenigvuldigen en delen in termen van modulus en argument

Neem twee getallen z_1 en z_2, en schrijf $z_1 = r_1(\cos\phi_1 i \sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$.
Dan geldt dus: $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2, \arg z_1 = \phi_1, \arg z_2 = \phi_2$. We rekenen nu het product $z_1 z_2$ uit:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= r_1 r_2 \big((\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)\big) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)) \end{aligned}$$

Hieruit concluderen we (met behulp van $\cos^2 + \sin^2 = 1$) dat

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|, \\ \arg(z_1 z_2) &= \phi_1 + \phi_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned}$$

Met andere woorden: bij vermenigvuldigen van complexe getallen moet je de moduli van die complexe getallen met elkaar vermenigvuldigen, en de argumenten bij elkaar optellen.
Verder, als $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, dan is

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)) \qquad \text{(ga na!)},$$

zodat het argument van het quotiënt gelijk is aan het verschil van de argumenten (modulo 2π) en de modulus van het quotiënt gelijk is aan het quotiënt van de moduli.

Notatie

We hanteren als notatie $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$. Dan is een complex getal z met modulus r en argument ϕ dus te schrijven als:

$$z = r\cos\phi + ir\sin\phi = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}.$$

Bijvoorbeeld, $z = 4 - 4i$ heeft als modulus $4\sqrt{2}$ en als argument $-\frac{\pi}{4}$, en dus $z = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Omgekeerd, het getal $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ is gelijk aan $z = 2\cos(\frac{\pi}{3}) + 2i\sin(\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$.

4.1 Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 4 - 4i$, en $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

(i) Bereken van beide getallen de modulus en de hoofdwaarde van het argument.

(ii) Bereken de modulus en de hoofdwaarde van het argument van

$$z_1 \cdot z_2^{-1}, \quad z_1^2 \cdot z_2^3 \text{ en } \bar{z}_1^3 \cdot z_2^2$$

(iii) Bereken z_2^{11} en z_1^{-8}.

4.2 Teken in het complexe vlak de beeldpunten van:

a. $\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$ c. $2\sqrt{3} \cdot e^{\frac{5}{6}\pi i}$

b. $2e^{-\frac{1}{3}\pi i}$ d. $2e^{\frac{1}{6}\pi i}$

4.3 Schrijf in de vorm $re^{i\phi}$:

a. -5 c. $-1 + i$

b. $2 + 2\sqrt{3}i$ d. $-4i$

4.4 Teken in het complexe vlak het beeldpunt van een willekeurig complex getal z. Geef vervolgens aan waar de beeldpunten liggen van:

a. $z \cdot e^{\pi i}$

b. $z \cdot e^{-\frac{\pi i}{2}}$

c. $z \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$

5. De Moivre's stelling

Als $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, dan is

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi), \\ z^3 &= r^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi), \end{aligned}$$

vanwege het feit dat je bij vermenigvuldiging van twee complexe getallen de moduli met elkaar moet vermenigvuldigen en de argumenten bij elkaar moet optellen.
In het algemeen:

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

Dus hebben we in het bijzonder voor $r = 1$:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = (\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

Dit staat bekend als *de stelling van De Moivre*. Door z^n ook op een andere wijze uit te rekenen krijg je aardige goniometrische identiteiten.
Bijvoorbeeld:
$z^2 = (r\cos\phi + ri\sin\phi)^2 = r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2ir^2\cos\phi\sin\phi$ enerzijds, maar aan de andere kant is $z^2 = r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)$.
Dus volgt dat
$r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2ir^2\cos\phi\sin\phi = r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)$,
en dus dat
$(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2i\cos\phi\sin\phi = \cos 2\phi + i\sin 2\phi$.
Omdat de reële delen aan elkaar gelijk moeten zijn, en de complexe delen ook aan elkaar gelijk moeten zijn, concluderen we dat

$$\begin{aligned} \cos 2\phi &= \cos^2\phi - \sin^2\phi, \text{ en} \\ \sin 2\phi &= 2\cos\phi\sin\phi, \end{aligned}$$

wat inderdaad bekende gonio-regels zijn!

5.1 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$. In deze som is k steeds een geheel getal.

a. $2e^{2k\pi i}$

b. $e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}$

c. $2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{k\pi}{2}i}$

d. $e^{k\pi i}$

e. $7e^{\frac{k\pi}{4}i}$

f. $3e^{(\frac{2}{3}+k\pi)i}$

g. $e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{k\pi}{3}i}$

h. $e^{(-\frac{5}{6}+\frac{k}{3})\pi i}$

5.2 Voor twee reële getallen a en b geldt:

$$\frac{(1-i\sqrt{3})^8}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6} = a + bi.$$

Bereken a en b.

5.3 Bereken

$$\frac{(1-i\sqrt{3})^{30}}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{20}}.$$

6. Oplossen van vergelijkingen

Met behulp van de stelling van de Moivre kunnen we nu vergelijkingen oplossen. We beginnen met enkele voorbeelden van simpele vergelijkingen waarbij we rechtstreeks de stelling kunnen toepassen.
Bekijk eerst, voor een vast gegeven n, de vergelijking

$$z^n = 1.$$

Schrijf $z = re^{i\phi}$. Volgens De Moivre is $z^n = r^n e^{in\phi}$, dus $z^n = r^n e^{in\phi} = 1 = 1 \cdot e^{i(0+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Vergelijk nu de moduli en de argumenten:

$$r^n = 1 \quad , \quad n\phi = 2k\pi.$$

Het lijkt alsof we hiermee niets winnen. Immers in plaats van $z^n = 1$ moeten we oplossen $r^n = 1$. Bedenk echter dat r een reëel getal is en dat $r > 0$. Dus $r = 1$. Verder is $\phi = \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Het lijkt nu alsof er oneindig veel oplossingen zijn, namelijk $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$. Maar voor $k = n$ staat er hetzelfde als voor $k = 0$; voor $k = n+1$ hetzelfde als voor $k = 1$, enz. Dus: $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, met $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Als volgend voorbeeld bekijken we de vergelijking

$$z^4 = 1 + i\sqrt{3}.$$

Stel $z = re^{i\phi}$. Weer volgt

$$z^4 = r^4 e^{i4\phi} = 1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Vergelijk weer modulus en argument:

$$r^4 = 2 \quad , \quad 4\phi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Er zijn maar vier verschillende oplossingen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{12} i} \\ z_2 &= 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{7\pi}{12} i} \\ z_3 &= 2^{\frac{1}{4}} e^{1\frac{1}{12}\pi i} \\ z_4 &= 2^{\frac{1}{4}} e^{1\frac{7}{12}\pi i} \end{aligned}$$

Voor alle andere waarden van k krijg je één van deze vier weer terug.

6.1 Los de volgende vergelijkingen op:

a. $z^8 = -1$

b. $z^6 = 64i$

c. $z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

d. $(z - 2i)^3 = i$

e. $z^4 + 1 = \sqrt{3}i$

f. $z^6 - 2z^3 + 1 = 0$

g. $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

h. $(z - 2 + i)^2 = 9i$

6.2 Los op: $(z+1)^7 + (z-1)^7 = 0$. Aanwijzing: noem $\frac{z+1}{z-1}$ even w, en geef eerst aan welke complexe waarden w kan hebben.

6.3 Gebruik de formules voor $\cos(2\phi)$ (en eventueel $\sin(2\phi)$) om uit $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ te concluderen dat $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}}$ en $\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$. Druk daarmee de oplossingen van $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$ uit in de vorm $z = a + bi$.

6.4 Los op:

a. $z^4 - 2z^2 \sin\phi + 1 = 0$

b. $z^6 - 2z^3 \cos\phi + 1 = 0$

7. Tweedegraadsvergelijkingen

We beginnen met een simpel voorbeeld: los op in complexe getallen de vergelijking $z^2+4z+5=0$. We gaan eerst kwadraat afsplitsen: $(z+2)^2+1=0$, ofwel $(z+2)^2=-1$. Dat kunnen we oplossen: Noem $z+2=w$. Dan staat er $w^2=-1$, ofwel $w=\pm i$, dus $z+2=\pm i$, dus $z=-2\pm i$.

Een iets lastiger voorbeeld: los op $z^2-2z+8-24i=0$. Eerst weer kwadraat afsplitsen:

$$(z-1)^2+7-24i=0,$$

ofwel $(z-1)^2=-7+24i$. Noem nu $z-1=w$. Dan staat er

$$w^2=-7+24i=25(-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i)$$

waarbij 25 de modulus is van $-7+24i$.
Schrijf nu $w=re^{i\phi}$. Dan $w^2=r^2e^{i2\phi}$. Dus

$$r^2=25, \quad \cos 2\phi=-\frac{7}{25}, \quad \sin 2\phi=\frac{24}{25}.$$

Dat levert $r=5$. Gebruik nu dat

$$\begin{aligned}\cos 2\phi &= 2\cos^2\phi-1,\\ \sin 2\phi &= 2\cos\phi\sin\phi;\end{aligned}$$

dat geeft $\cos^2\phi=\frac{9}{25}$, ofwel $\cos\phi=\pm\frac{3}{5}$; $\cos\phi=\frac{3}{5}$ geeft $\sin\phi=\frac{4}{5}$, en $\cos\phi=-\frac{3}{5}$ geeft $\sin\phi=-\frac{4}{5}$.
Dus: $w=5(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)=3+4i$ òf $w=5(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i)=-3-4i$. Voor z levert dat $(z-1=w): z=4+4i$ òf $z=-2-4i$.

Nog een voorbeeld: los op $z^2+(-3+i)z+4=0$. Kwadraat afsplitsen:

$$(z+(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i))^2-(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i)^2+4=0,$$

met andere woorden

$$(z+(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i))^2+4-(2-\frac{3}{2}i)=0,$$

ofwel $(z+(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i))^2=-2-\frac{3}{2}i=\frac{5}{2}(-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i)$.
Noem $z+(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i)=w=re^{i\phi}$, dan is $r^2=\frac{5}{2}$, dus $r=\sqrt{\frac{5}{2}}$, en $\cos 2\phi = 2\cos^2\phi-1=-\frac{4}{5}, \sin 2\phi=-\frac{3}{5}$. Dat levert $\cos\phi=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. Voor $\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{10}}$ krijgen we $\sin\phi=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ en $\cos\phi=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ geeft $\sin\phi=\frac{3}{\sqrt{10}}$.
Dus: $w=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}i)=\pm(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i)$, zodat $z=2-2i$ of $z=1+i$.

7.1 Los de volgende vergelijkingen op. (In deze serie hoef je alleen maar kwadraat af te splitsen en daarna kun je direct de vergelijking oplossen).
a. $z^2 - 2iz + 2 = 0$
b. $z^3 - 4z^2 + 13z = 0$
c. $z^2 + (2 - 2i)z - 2 - 2(1 + \sqrt{3})i = 0$
d. $z^2 - z(2 + 2i) + 2i - 1 = 0$
e. $z^2 + (2 - 2i)z + 4 - 2i = 0$
f. $z^2 - (4 - 6i)z - (5 + 10i) = 0$
g. $(1 + 2i)z^2 + (12 - 6i)z - 13 - 26i = 0$

7.2 Los de volgende tweedegraadsvergelijkingen op.
a. $z^2 - (2 + 6i)z = -12i$
b. $z^2 - (4 + 2i)z = 8i$
c. $z^2 - 2iz - 6 - 12i = 0$
d. $z^2 - 2z - (2 - 4i) = 0$
e. $z^2 + (-2 + 4i)z + 2 - 16i = 0$

7.3 a. Laat zien dat $z = 1$ een oplossing is van $z^3 - 3z^2 + 7z - 5 = 0$ en bepaal de andere (complexe oplossingen).
b. Laat zien dat $z = i$ een oplossing is van de vergelijking $z^3 - (6 + 3i)z^2 + (3 + 16i)z + (10 - 5i) = 0$, en bepaal de andere oplossingen. c. Laat zien dat $z = -1$ een oplossing is van $(3 + 4i)z^2 + 5z + (2 - 4i) = 0$ en bepaal de andere oplossing.

8. Toepassingen

Als voorbeeld van hoe verzamelingen van complexe getallen bekende meetkundige figuren kunnen opleveren doen we het volgende voorbeeld:
Bepaal in het complexe vlak de getallen z die voldoen aan

$$|z - (2 + 4i)| = 9.$$

Oplossing: stel $z = x + iy$, we gaan nu een vergelijking in x en y opstellen waaraan het punt moet voldoen. We hebben:

$$|z - (2 + 4i)| = |(x - 2) + i(y - 4)| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2}.$$

Dus, $|z - (2 + 4i)| = 9$ is equivalent met

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 81.$$

Zoals bekend stelt dit in het platte vlak een cirkel voor met middelpunt $(2, 4)$ en straal 9. De verzameling van alle complexe punten z waarvoor $|z - (2 + 4i)| = 9$ is dus de cirkel met middelpunt $2 + 4i$ en straal 9.

8.1 "Meetkundige plaatsen"
Geef in het complexe vlak aan waar de beeldpunten liggen van de getallen z die voldoen aan:

a. $|z-3i|<5$
b. $\Re z \geq -\Im z$
c. $\mathrm{Arg}\frac{z-1}{z+1}=\frac{\pi}{2}$
d. $|z-i|=\Im(z+i)$
e. $|z-3i|=|4+2i-z|$
f. $\Re(z-5+2i)=1$
g. $\Im\frac{z-3}{z+2i}=0$
h. $|z-1-i|=\sqrt{2}$ en $|z+2|=|z-2-4i|$.

8.2* Toon aan

a. Als $|z-1|=2$ dan is $\frac{z+1}{z-3}$ zuiver imaginair ($z \neq 3$).
b. Als $|z|=2$, dan is $\frac{z^2-5z+4}{2z}$ reëel.
c. Als $|z|=1$, dan is $\left|\frac{2z-1}{z-2}\right|=1$.
d. Als $|z|=1$, dan is $\frac{z^2-1}{z}$ zuiver imaginair.
e. Zij $f(x)=\frac{z^2-z+1}{2z}$. Als $|z|=1$ dan is $f(z)$ reëel, en $f(z)=f(\bar{z})$.

9a.* Goniometrische identiteiten

Om verder te komen even een intermezzo over het volgende probleem: hoe reken je $(a+b)^n$ uit? Het antwoord is inmiddels bekend uit het Binomium van Newton.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}\\ &= a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Voorbeeld: Druk $\cos 6\phi$ uit in machten van $\cos\phi$ en $\sin\phi$.
Oplossing: Volgens De Moivre is
$\cos 6\phi + i\sin 6\phi = (\cos\phi + i\sin\phi)^6$.
Volgens het binomium van Newton is

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^6 = \cos^6\phi + 6i\cos^5\phi\sin\phi + 15\cos^4\phi\cdot i^2\sin^2\phi +$$
$$20\cos^3\phi\cdot i^3\sin^3\phi + 15\cos^2\phi\cdot i^4\sin^4\phi + 6\cos\phi\cdot i^5\sin^5\phi + i^6\sin^6\phi.$$

Het reële deel van deze uitdrukking moet dus gelijk zijn aan $\cos 6\phi$, ofwel

$$\cos 6\phi = \cos^6\phi - 15\cos^4\phi\sin^2\phi + 15\cos^2\phi\sin^4\phi - \sin^6\phi.$$

Zo volgt ook $\sin 6\phi = 6\cos^5\phi\sin\phi - 20\cos^3\phi\sin^3\phi + 6\cos\phi\sin^5\phi$.

Voorbeeld: Om omgekeerd bijvoorbeeld $\cos^6\phi$ uit te drukken in cosinussen en sinussen van veelvouden van ϕ gebruik je de regels:

$$\begin{aligned}e^{i\phi} + e^{-i\phi} &= 2\cos\phi \text{ , en}\\ e^{i\phi} - e^{-i\phi} &= 2i\sin\phi.\end{aligned}$$

Met $z = e^{i\phi}$ wordt dit:

$$\begin{aligned}z + \frac{1}{z} &= 2\cos\phi \text{ , en}\\ z - \frac{1}{z} &= 2i\sin\phi.\end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned}2^6\cos^6\phi &= (z+\frac{1}{z})^6\\ &= z^6 + 6z^5\frac{1}{z} + 15z^4\frac{1}{z^2} + 20z^3\frac{1}{z^3} + 15z^2\frac{1}{z^4} + 6z\frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}\\ &= z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15\cdot\frac{1}{z^2} + 6\cdot\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6}\\ &= (z^6 + \frac{1}{z^6}) + 6(z^4 + \frac{1}{z^4}) + 15(z^2 + \frac{1}{z^2}) + 20\\ &= 2\cos 6\phi + 6\cdot 2\cos 4\phi + 15\cdot 2\cos 2\phi + 20.\end{aligned}$$

Dus :

$$\cos^6\phi = \frac{1}{32}\cos 6\phi + \frac{3}{16}\cos 4\phi + \frac{15}{32}\cos 2\phi + \frac{5}{16}.$$

9.a.1 Laat zien dat

a. $\cos 5\phi = 16\cos^5\phi - 20\cos^3\phi + 5\cos\phi$,

b. $\cos^4\phi = \frac{1}{8}(\cos 4\phi + 4\cos 2\phi + 3)$.

10.* Complexe e-macht en logarithme

De functie $x \to e^x$ kun je uitbreiden naar de complexe getallen door af te spreken

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

De functie $x \to \log x$ kun je uitbreiden naar de complexe getallen via de volgende afspraak:
voor $z = x + iy = re^{i\phi}$ is Log$z = (\log r) + i\phi$, waar log staat voor de $e - \log$, dat wil zeggen de *natuurlijke logaritme*. Met deze definitie is evenwel iets mis, omdat ϕ slechts bepaald is op een veelvoud van 2π na. We spreken dan ook af $-\pi < \phi \leq \pi$, ofwel we nemen de hoofdwaarde van het argument. Dus:
Log$z = \log r + i\phi$, met $-\pi < \phi \leq \pi$ en
$z = re^{i\phi}$, $z \neq 0$.
De op die manier verkregen functie heet de *hoofdwaarde*van de logaritme.

Volledige inductie

1. Inleiding

Volledige inductie is een methode om beweringen te bewijzen die voor *alle* natuurlijke getallen n (dus voor $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$) waar zijn. De manier waarop je hierbij te werk gaat is als volgt:

(i) Laat eerst zien dat het waar is voor $n = 1$ (de zogenaamde *basisstap*).

(ii) Laat dan zien dat *als* het waar is voor een getal m *dan* is het ook waar voor het getal $m + 1$ (de zogenaamde *inductiestap*.

Eerst een voorbeeld van hoe je dan te werk gaat: de bewering is dat voor elk natuurlijk getal n geldt $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Anders geschreven, we beweren dat

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Dat weten we natuurlijk al, en een elegant bewijs is de bekende truc:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= S \\ n + (n - 1) + \cdots + 1 &= S \end{aligned}$$

dus $n(n + 1) = 2S$.
We bewijzen het nu echter met volledige inductie: eerst de basisstap. Voor $n = 1$ is $\sum_{j=1}^{n} j = \sum j = 1^1 j = 1 = \frac{1}{2}12$, en dus is de bewering juist voor $n = 1$. Nu de inductiestap: stel de bewering is waar voor $n = m$, dus

$$\sum_{j=1}^{m} j = \frac{1}{2}m(m + 1).$$

(Dit is de zogenaamde *inductieaanname* of *inductiehypothese*.) We willen nu laten zien dat de bewering ook waar is voor $n = m + 1$, dus we willen laten zien dat

$$\sum_{j=1}^{m+1} j = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2).$$

Dat gaat als volgt. Voor $n = m + 1$ geldt:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m+1} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + m + (m + 1) = \\ = &\left(\sum_{j=1}^{m} j\right) + (m + 1) = (1 + 2 + 3 + \cdots + m) + (m + 1). \end{aligned}$$

Tot nu toe is er niets gebeurd, we hebben alleen die ingewikkelde som nu zo herschreven dat we er een stuk in herkennen waarop we de inductieaanname kunnen loslaten. Als we dat doen dan krijgen we:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m+1} j = (1 + 2 + 3 + \cdots + m) + (m + 1) \\ = &\frac{1}{2}m(m + 1) + (m + 1). \end{aligned}$$

Nu zijn we bijna waar we zijn willen, we moeten alleen even wat algebra toepassen om dit te herschrijven in de goede vorm. Dat doen we door $m+1$ buiten haakjes te halen.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m+1} j = \frac{1}{2}m(m+1) + (m+1) \\ = \quad & \left(\frac{1}{2}m + 1\right)(m+1) \\ = \quad & \frac{1}{2}(m+2)(m+1),\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap een factor $\frac{1}{2}$ buiten haakjes hebben gehaald. Zo je ziet is dat wat we wilden bewijzen.

We beweren nu, dat als je zowel de basistap als de inductiestap gedaan hebt, dat je dan het bewijs voor alle natuurlijke getallen hebt geleverd. Waarom is dat zo? Stel je voor dat je zou willen laten zien dat de bewering uit ons voorbeeld waar is voor $n = 1081$. Welnu, volgens de basistap is de bewering waar voor $n = 1$. Volgens de inductiestap: als de bewering waar is voor het natuurlijke getal 1 dan is hij ook waar voor het getal 2. Pas nogmaals de inductiestap toe, maar nu met $m = 2$. Omdat de bewering waar is voor 2 is hij ook waar voor 3. Nu nogmaals de inductiestap: omdat de bewering waar is voor 3 is hij waar voor 4. Enzovoorts, tot je uiteindelijk ook laat zien: de bewering is waar voor 1080. Dan de laatste keer de inductiestap: de bewering is waar voor 1081 omdat je al hebt laten zien dat hij waar is voor 1080.

Vergelijk een bewijs met volledige inductie met traplopen: als je op de eerste tree kunt komen (de basisstap), en je weet hoe je van een willekeurige tree naar één tree hoger kunt komen (de inductiestap), dan kun je elke trap beklimmen, hoe hoog die ook is. Een andere manier om er tegenaan te kijken is het omvallen van dominostenen. Zolang het zo is dat voor elke n na de n'de dominosteen de $n+1$'ste omvalt (de inductiestap), dan vallen ze allemaal om als we de eerste om doen vallen (de basisstap).

1.1 Eindige sommen en producten. Bewijs telkens met volledige inductie dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}$

d. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(1+n)$

e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+3)!}{k!} = \frac{1}{4}\frac{(n+4)!}{n!}$

f. $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{2(n+1)}$

g. $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n+1} (3k-1) = n(6n+7)$

h. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n$

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

j. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

k. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

1.2 Een voorbeeld waaruit blijkt dat de basisstap echt nodig is.

Bekijk de bewering $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{8}(2n+1)^2$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

a. Laat zien dat de inductiestap bij deze bewering correct is (m.a.w. geef een inductiebewijs zonder de basisstap).

b. Is deze bewering waar?

2. Deelbaarheid

We behandelen nu een paar voorbeelden waarbij een bewijs met volledige inductie goed van pas komt. De bewering is dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ het getal $9^n - 4^n$ deelbaar is door 5. We bewijzen dit met volledige inductie.
Eerst de basisstap: voor $n = 1$ staat er de bewering dat $9 - 4$ deelbaar is door 5, en dat is natuurlijk ook zo.
Nu de inductiestap. Stel dat $9^m - 4^m$ deelbaar is door 5 (dat is de inductieaanname). We moeten nu laten zien dat daaruit volgt dat $9^{m+1} - 4^{m+1}$ deelbaar is door 5. Dat gaat als volgt. Je moet natuurlijk ergens die inductieaanname gebruiken, dus we herschrijven

$$9^{m+1} - 4^{m+1} = 9 \cdot (9^m - 4^m) + 9 \cdot 4^m - 4^{m+1}.$$

Nu is het eerste deel mooi deelbaar door 5 vanwege de inductieaanname. Dus hoeven we alleen nog te laten zien dat de laatste twee termen samen deelbaar zijn door 5. Maar $4^{m+1} = 4 \cdot 4^m$. Dus, als we alles even samen nemen:

$$\begin{aligned} & 9^{m+1} - 4^{m+1} = 9 \cdot (9^m - 4^m) + 9 \cdot 4^m - 4 \cdot 4^m = \\ = \; & 9 \cdot (9^m - 4^m) + (9 - 4) \cdot 4^m = \\ = \; & 9 \cdot (9^m - 4^m) + 5 \cdot 4^m. \end{aligned}$$

Nu zie je dat de eerste term deelbaar is door 5 vanwege de inductieaanname, en de tweede term is ook deelbaar door 5. Dus is het geheel deelbaar door 5, en de inductiestap is voltooid.

Nog een voorbeeld om het principe nogmaals te laten zien. Toon aan dat $2 \cdot 3^{2n+2} + 3 \cdot 2^n$ deelbaar is door 42 voor iedere $n \in \mathbb{N}$.
Basisstap: $2 \cdot 3^{2 \cdot 1+2} + 3 \cdot 2^1 = 168 = 4 \cdot 42$, dus de uitspraak is waar voor $n = 1$.
Inductiestap: neem aan dat de uitspraak waar is voor $n = m$, dus $2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m$ is deelbaar door 42. We bewijzen dat de uitspraak dan ook waar is voor $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{2(m+1)+2} + 3 \cdot 2^{m+1} &= 2 \cdot (2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m) - 4 \cdot 3^{2m+2} + 2 \cdot 3^{2(m+1)+2} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m) - 4 \cdot 3^{2m+2} + 2 \cdot 9 \cdot 3^{2m+2} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m) + 14 \cdot 3^{2m+2} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m) + 42 \cdot 3^{2m+1}. \end{aligned}$$

Nu zijn beide termen deelbaar door 42, en dus is de inductiestap voltooid.

2.1 Deelbaarheid.
Bewijs met volledige inductie dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

a. $7^n - 3^n$ is deelbaar door 4
b. $7^n + 3^{n+1}$ is deelbaar door 4
c. $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ is deelbaar door 7
d. $5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}$ is deelbaar door 7
e. $4^{2n+1} + 5 \cdot 7^n$ is deelbaar door 9
f. $7^{2n} - 5^{2n}$ is deelbaar door 12
g. $9^{2n} + 3 \cdot 4^{2n+1}$ is deelbaar door 13
h. $4^{2n} + 11 \cdot 2^{2n}$ is deelbaar door 6
i. $3 \cdot 9^{2n} + \cdot 3^{2n+2}$ is deelbaar door 12
j. $7^n + 3 \cdot 5^n$ is deelbaar door 2

2.2 Bewijs met volledige inductie dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

a. $3^{2^n} - 1$ is deelbaar door 2^{n+2}
b. $3^{2^n} - 1$ is niet deelbaar door 2^{n+3}
c. $x^n - y^n$ is deelbaar door $x - y$ $(x, y \in \mathbb{R}, x \neq y)$
d. $x^{2n} - y^{2n}$ is deelbaar door $x + y$, $(x, y \in \mathbb{R}, x \neq -y)$
e. $x \cdot y^{2n} + y \cdot x^{2n}$ is deelbaar door $x + y$, $(x, y \in \mathbb{R}, x \neq -y)$

3. De binomiaalformule van Newton

In het boek wordt in hoofdstuk 7 de binomiaalformule van Newton al behandeld. Herinner dat de binomiaalformule er als volgt uitziet:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

De formule geldt voor willekeurige reële (of complexe) getallen a en b en voor $n \geq 0$ een geheel getal.
De getallen $\binom{n}{j}$ heten de binomiaalcoefficienten, en ze kunnen worden uitgerekend met de formule

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Je ziet dan onmiddellijk dat geldt $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$.
Minder evident is de volgende gelijkheid:

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j}$$

die geldig is voor $1 \leq j \leq n$. Deze gelijkheid zal straks de cruciale stap zijn in een bewijs van de binomiaalformule door middel van volledige inductie. Daarom is het nuttig deze gelijkheid ook echt even te bewijzen. Dat gaat als volgt:

$$\begin{aligned}\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} &= \frac{n!}{j!(n-j)!} + \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} \\ &= \frac{n!(n-j+1) + n!j}{j!(n-j+1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{j!(n+1-j)!} = \binom{n+1}{j}.\end{aligned}$$

Deze formule ken je eigenlijk al wel: het beschrijft precies de manier waarop je de $n+1$-ste rij uit de driehoek van Pascal maakt uit de n-de rij: om het j-de getal uit de $n+1$-ste rij te krijgen tel je de twee getallen die er schuin boven staan in de n-de rij op. In formulevorm is dat precies wat we net bewezen hebben.

Bewijs met volledige inductie van de binomiaalformule

Eerst doen we, zoals gebruikelijk, de basisstap. Voor $n = 0$ geldt: $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$.
Nu de inductiestap. Neem dus aan dat de formule correct is voor $n = m$. We bewijzen dat de formule dan ook correct is voor $n = m+1$. De eerste stap in

het onderstaande is nogal voor de hand liggend:

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1} &= (a+b)(a+b)^m = (a+b)\cdot\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}a^{m-j}b^j \\ &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}a^{m-j+1}b^j + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}a^{m-j}b^{j+1}.\end{aligned}$$

Merk op dat de term met a^{m+1} alleen in de eerste sommatie voorkomt (voor $j=0$); de term met b^{m+1} alleen in de tweede sommatie voorkomt, terwijl bijvoorbeeld de term met $a^m b$ zowel in de eerste als in de tweede sommatie voorkomt. Om die reden splitsen we het bovenstaande even op (let op de onder- en bovengrenzen van de sommaties):

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}a^{m-j+1}b^j + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}a^{m-j}b^{j+1} \\ = \;& a^{m+1} + \sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}a^{m-j+1}b^j + \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}a^{m-j}b^{j+1} + b^{m+1}.\end{aligned}$$

Nu komt er een echte truc. In de eerste sommatie vervangen we de j door een l (daarmee verandert de som natuurlijk niet), en in de tweede vervangen we de j door een $l-1$. Dat verandert de uitkomst van die optellingen niet, alleen geef je elke term als het ware even een andere naam. Het levert op

$$\begin{aligned}& a^{m+1} + \sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}a^{m-j+1}b^j + \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}a^{m-j}b^{j+1} + b^{m+1} \\ = \;& a^{m+1} + \sum_{l=1}^{m}\binom{m}{l}a^{m-l+1}b^l + \sum_{l=1}^{m}\binom{m}{l-1}a^{m-l+1}b^l + b^{m+1}.\end{aligned}$$

Nu gaan die twee sommaties plotseling over dezelfde l-en, en het aardige is dat we ze dus samen kunnen nemen:

$$\begin{aligned}& a^{m+1} + \sum_{l=1}^{m}\binom{m}{l}a^{m-l+1}b^l + \sum_{l=1}^{m}\binom{m}{l-1}a^{m-l+1}b^l + b^{m+1} \\ = \;& a^{m+1} + \sum_{l=1}^{m}\left\{\binom{m}{l} + \binom{m}{l-1}\right\}a^{m-l+1}b^l + b^{m+1} \\ = \;& a^{m+1} + \sum_{l=1}^{m}\binom{m+1}{l}a^{m-l+1}b^l + b^{m+1} \\ = \;& \sum_{l=0}^{m+1}\binom{m+1}{l}a^{m-l+1}b^l.\end{aligned}$$

In de voorlaatste gelijkheid hebben we daar gebruik gemaakt van de gelijkheid die we eerder bewezen. Concluderend, we hebben nu bewezen dat

$$(a+b)^{m+1}\sum_{l=0}^{m+1}\binom{m+1}{l}a^{m-l+1}b^l.$$

Daarmee is het bewijs voltooid.

3.1 Voor een functie $h(x)$ noteren we de n-de afgeleide met $h^{(n)}$. Bewijs met volledige inductie de formule van Leibnitz voor de n-de afgeleide van een product van twee functies f en g. Die formule ziet er als volgt uit:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) f^{(n-j)} g^{(j)}.$$

Aanwijzing: het bewijs volgt precies dezelfde stappen als het bewijs van de binomiaalformule.

3.2 Door in de binomiaalformule geschikte getallen voor a en b in te vullen kun je allerlei interessante formules verkrijgen. Laat zien dat:

a. $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n$

b. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 0$

c. $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k = (1+x)^n$.

Bereken

d. $\sum_{k=0}^{25} \left(\begin{array}{c} 25 \\ k \end{array} \right) 2^k (-3)^{28-k}$

e. $\sum_{k=0}^{30} \left(\begin{array}{c} 31 \\ k \end{array} \right) 4^k (-2)^{30-k}$.

f. Bewijs de formule in onderdeel a direct met volledige inductie.

3.3 Nog wat formules op basis van afgeleide en primitieve van $(1+x)^n$.

a. $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^{k-1}$

b. $\frac{1}{n+1} \left((1+x)^{n+1} - 1 \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^{k+1}$

c. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 0$

d. $\sum_{k=0}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = n2^{n-1}$

e. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$.

3.4 Deze opgave betreft hogere afgeleiden.

a. Zij $f(x) = \sin x$. Laat met behulp van volledige inductie zien dat

$$f^{(n)}(x) = \sin \left(x + \frac{1}{2} n\pi \right).$$

b. Bepaal voor de volgende functies een formule voor de n-de afgeleide en bewijs die formule met volledige inductie: i. $f_1(x) = \cos x$

ii. $f_2(x) = \frac{1}{1+x}$

iii. $f_3(x) = \ln x$.

c. Bewijs dat $\frac{d^n}{dx^n} f(ax) = a^n f^{(n)}(ax)$. Leid vervolgens hiermee en met de

formule uit a een formule af voor $\frac{d^n}{dx^n}(\sin 2x)$.
d. De functie $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Toon aan, met volledige inductie,

$$f^{(n)} = (-1)^n n! \left\{ (x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right\}.$$