

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Complexe Functietheorie deel 2
Afdeling Wiskunde	18-12-2009
Vrije Universiteit	12.00 - 14.00 uur

Alle studenten maken opgaven 1, 2, 3 en 4. 5 is een bonusopgave. .

Normering: 1 punt voor 1a,1b,2c,2d,4a,4b,4c; 1/2 punt voor 2a,2b;

2 punten voor 3; 1 punt voor 5,

Cijfer deeltentamen is het totaal maar minimaal 1 en maximaal 10.

1. a) De strip R wordt gegeven door $R = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$. Bepaal het beeld van R onder de afbeelding $z \rightarrow \sin z$ en licht met een schets toe waar de drie rechte randstukken van R terecht komen.
- b) Laat $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$. Bepaal het beeld van S onder de afbeelding

$$z \rightarrow \frac{z-1}{z+1},$$

en licht met een schets toe waar de twee rechte randstukken van S terecht komen.

2. Hieronder is γ steeds een gesloten stuksgewijs gladde kromme in $\mathbb{C}$ met parametrisatie $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$. Het windingsgetal van γ rond α wordt gedefinieerd door

$$n(\gamma; \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - \alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \alpha} dt,$$

mits $\alpha \notin \{\gamma\}$.

- a) Bereken $n(\gamma; \alpha)$ als γ gegeven is door $\gamma(t) = \alpha + \rho \exp(it)$ met $t \in [0, 2\pi]$ (de linksom doorlopen cirkel met straal ρ en middelpunt α).
 - b) De halffijn $l_{\alpha, \psi}$ wordt gegeven door $l_{\alpha, \psi} = \{z = \alpha + te^{i\psi} : t \geq 0\}$. Laat zien dat $\log(z - \alpha)$ op het complement $S_{\alpha, \psi} = \mathbb{C} \setminus l_{\alpha, \psi}$ van $l_{\alpha, \psi}$ als 1-waardige functie kan worden gedefinieerd.
 - c) Laat met het vorige onderdeel zien dat $n(\gamma; \alpha) = 0$ als γ in $S_{\alpha, \psi}$ ligt.
 - d) Laat met behulp van de eerste drie onderdelen zien dat $n(\gamma; \alpha) = 1$ als $|\alpha| < R$ en γ gegeven is door $\gamma(t) = R \exp(it)$ met $t \in [0, 2\pi]$. Hint: neem ρ klein genoeg en introduceer twee gesloten stuksgewijs gladde krommen die elk bestaan uit twee cirkelbogen en twee lijnstukken, en recombineer de 8 bijdragen.
3. Bereken voor $n \in \mathbb{N}$ en $0 < a < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{1 + a^2 - 2a \cos(t)} dt$$

door de residustelling met windingsgetallen toe te passen op een geschikt gekozen functie $f(z)$ en gesloten gladde kromme γ . Je mag gebruik maken van de resultaten in opgave 2. Verifieer ook dat aan de aannamen van de stelling is voldaan. Hint: $\cos(nt) = \operatorname{Re} e^{int}$.

4. Laat $G = \mathbb{C} \setminus \{ti : t \leq 0\}$ het complement van de negatieve imaginaire as zijn. De analytische functie $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ wordt gegeven door

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z^2 + 1)^2},$$

waarbij $z^{\frac{1}{3}}$ zo gedefinieerd wordt dat $z^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}^+$ als $z \in \mathbb{R}^+$.

- a) Bepaal het singuliere gedeelte van de Laurentreeks van $f(z)$ rond $z = i$. Suggestie: bepaal eerst rond $z = i$ de eerste twee termen van de machtreeksontwikkeling van $z^{\frac{1}{3}}$ en de eerste twee termen van de Laurentreeksontwikkeling van

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^2}.$$

- b) Definieer een gesloten stuksgewijs gladde kromme $\gamma_{\rho,R}$ die bestaat uit twee cirkelbogen rond 0 en de twee reële intervallen $[-R, -\rho]$ en $[\rho, R]$. Bereken de integraal

$$\int_{\gamma_{\rho,R}} \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z^2 + 1)^2} dz$$

door de residustelling met windingsgetallen toe te passen. Je mag gebruik maken van de resultaten in opgave 2. Verifieer ook dat aan de aannamen van de stelling is voldaan.

- c) Bereken, met toelichting, de integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

5. Bonusopgave. Bereken, voor alle $a > -1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2 + 1)^2} dx.$$