De wortel uit min één, Cardano, Kepler en Newton

Van de middelbare school kent iedereen wel de a, b, c-formule (hier en daar ook wel het "kanon" genoemd) voor de oplossingen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Deze luidt

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}.$$

Als de discrimant $D = b^2 - 4ac$ van de vergelijking negatief is geeft dit echter geen reële oplossingen omdat we in de reële getallen geen wortels kunnen trekken uit negatieve getallen. In de wiskunde is dit aanleiding een nieuwe getallenverzameling te maken waarin dit wèl kan. Dit kan door een getal i (van *imaginair)* in te voeren met de eigenschap dat $i^2 = -1$. Slordig gezegd: $i = \sqrt{-1}$. Als we dit getal toevoegen aan de reële getallen en proberen de elementaire rekenkundige operaties uit te voeren, dan krijgen we bijvoorbeeld $1 + i$ als de som van 1 en i, $2i$ als het produkt van 2 en i, $(3 + 2i) + (2 - i) = 5 + i$, $(1 - 3i)(2 + i) = 2 - 5i - 3i^2 = 5 - 5i$. We kunnen zelfs delen:

$$\frac{3+i}{1-2i} = \frac{3+i}{1-2i}\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+7i+2i^2}{1^2-(2i)^2} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i.$$

De getallen van de vorm $a + bi$ met a en b zèlf gewone reële getallen worden de *complexe getallen* genoemd.

De eerste die met deze complexe getallen werkte was Cardano (1501-1576), maar niet vanwege het probleem van negatieve discriminanten bij de vierkantsvergelijking. Cardano had een oplossingsformule gevonden voor de volgende derdegraadsvergelijking

$$x^3 + px + q = 0.$$

Substitueer

$$x = y + z.$$

Dit geeft $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y + z) + q = 0$, ofwel

$$y^3 + z^3 + (3yz + p)(y + z) + q = 0.$$

Stellen we nu $3yz + p = 0$, dan vinden we dat y en z moeten voldoen aan het volgende stelsel.

$$\begin{cases} y^3 + z^3 + q = 0, \\ \qquad 3yz + p = 0. \end{cases}$$

Als we de tweede vergelijking gebruiken om in de eerste z te elimineren, krijgen we

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Met de a, b, c-formule volgt

$$y^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}; \qquad z^3 = -q - y^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Het is geen beperking om bij y de "plus" en bij z de "min" te kiezen. De oplossing van $x^3 + px + q = 0$ wordt nu

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Gaat men deze formule toepassen, dan stuit men al snel op de eerder genoemde wortel uit min een. Neem bijvoorbeeld de vergelijking

$$x^3 - 6x - 4 = 0 \qquad (p = -6,\ q = -4).$$

Cardano's formule geeft

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}.$$

We vervangen nu in deze formule $\sqrt{-1}$ door het getal i. Dus

$$x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}.$$

Vermenigvuldiging links en rechts met $\sqrt[3]{2+2i}$ geeft

$$x\sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{(2+2i)^2} + \sqrt[3]{(2+2i)(2-2i)} = \sqrt[3]{8i} + \sqrt[3]{8} = 2(\sqrt[3]{i} + 1) = 2(-i+1).$$

In de laatste stap hebben we gebruikt dat $\sqrt[3]{i} = -i$, immers $(-i)^3 = -i^3 = -i \cdot i^2 = -i \cdot -1 = i$. Links en rechts de derde macht nemen levert nu

$$x^3(2+2i) = 8(i - 3 - 3i + 1) = -8(2+2i),$$

zodat $x^3 = -8$ en $x = -2$. We vinden deze reële wortel dus pas na een berekening met complexe getallen.

De reële getallen worden vaak voorgesteld als een reële (getallen-)lijn. De complexe getallen worden voorgesteld door het zogenaamde complexe vlak. Het complexe getal $a+bi$ wordt dan getekend als het punt (a, b) in het x, y-vlak. De coordinaat a heet het *reële deel* en b het *imaginaire deel*. De afstand r van (a, b) tot de oorsprong heet de *absolute waarde*. De hoek φ tussen de positieve x-as en de vector $\binom{a}{b}$ heet het *argument*.

We kunnen ook functies maken waarin complexe getallen voorkomen. Bijvoorbeeld

$$f(x) = \cos x + i \sin x.$$

De afgeleide naar x is

$$f'(x) = -\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x) = if(x).$$

Ook

$$f(0) = 1 \quad \text{en} \quad f'(0) = i.$$

Vergelijken we dit met

$$g(x) = e^{2x}; \quad g'(x) = 2e^{2x} = 2g(x); \quad g(0) = 1; \quad g'(0) = 2,$$

dan zien we dat de i bij $f(x)$ dezelfde rol speelt als de 2 bij $g(x)$. Dit leidt tot de definitie

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Als we $x = \pi$ invullen en alles naar één kant brengen, vinden we de merkwaardige formule $e^{i\pi} + 1 = 0$ die een relatie geeft tussen de vijf belangrijkste getallen in de wiskunde.

Laten we nu eens aannemen dat we het x, y-vlak (ook) gebruiken om het zonnestelsel te beschrijven. We plaatsen de zon in de oorsprong en de aarde in het punt (a, b). De invloed van de andere planeten verwaarlozen we. We gebruiken nu de eerder genoemde r en φ om de baan van de aarde te beschrijven. Hiermee worden r en φ allebei functies van de tijd t. Dus $r = r(t)$ en $\varphi = \varphi(t)$. Het verband tussen a en b enerzijds en r en φ anderzijds wordt gegeven door

$$(a, b) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Voor het corresponderende complexe getal vinden we

$$a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Volgens de wetten van Newton (1642-1727) die, en dat is geen toeval in dit verband, ook een van de grondleggers van de differentiaalrekening was, is de zwaartekrachtsversnelling die de aarde ten gevolge van de aantrekkingskracht van de zon ondergaat, naar binnen gericht en in grootte omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand. In de mechanica wordt de snelheid berekend door de plaatsfunctie naar de tijd te differentiëren, en de versnelling door de snelheid naar de tijd te differentiëren. De versnelling is dus de tweede tijdsafgeleide van de plaats. Passen we dit in complexe notatie toe, dan krijgen we, gemakshalve de evenredigheidsconstante op één stellend, de volgende bewegingsvergelijking:

$$\big(r(t)e^{i\varphi(t)}\big)'' = -\frac{1}{r(t)^2}e^{i\varphi(t)}.$$

We gaan nu het linkerlid met behulp van de produktregel en de kettingregel voor differentiëren uitwerken. We laten hierbij de variabele t weg uit de formules. De eerste afgeleide is

$$(re^{i\varphi})' = r'e^{i\varphi} + r(e^{i\varphi})' = r'e^{i\varphi} + rie^{i\varphi}\varphi'.$$

De tweede afgeleide is

$$(re^{i\varphi})'' = (r'e^{i\varphi})' + (rie^{i\varphi}\varphi')' = r''e^{i\varphi} + r'(e^{i\varphi})' + r'ie^{i\varphi}\varphi' + ri(e^{i\varphi})'\varphi' + rie^{i\varphi}\varphi'' =$$

$$r''e^{i\varphi} + r'ie^{i\varphi}\varphi' + r'ie^{i\varphi}\varphi' + ri^2e^{i\varphi}\varphi'\varphi' + rie^{i\varphi}\varphi'' =$$
$$e^{i\varphi}(r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'').$$

Invullen in de bewegingsvergelijking geeft

$$e^{i\varphi}(r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'') = -\frac{1}{r^2}e^{i\varphi}.$$

We delen nu door $e^{i\varphi}$. Dan

$$r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'' = -\frac{1}{r^2},$$

ofwel

$$r'' - r(\varphi')^2 + \frac{1}{r^2} + i(2r'\varphi' + r\varphi'') = 0 = 0 + 0i.$$

Reële en imaginaire delen links en rechts gelijkstellend vinden we nu het stelsel

$$\begin{cases} r'' - r(\varphi')^2 + \dfrac{1}{r^2} = 0, \\ 2r'\varphi' + r\varphi'' = 0. \end{cases}$$

Merk op dat de i nu weer verdwenen is. Vanaf hier rekenen we weer gewoon reëel.

De laatste vergelijking kan, na vermenigvuldigen met r, geschreven worden als

$$(r^2\varphi')' = 0,$$

dus

$$r^2\varphi' = \text{constant}.$$

Dit is de perkenwet van Kepler (1571-1630) die zegt dat het verbindende lijnstuk tussen de aarde en de zon in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten doorloopt. Ook deze constante stellen we gemakshalve op één. We kunnen dan

$$\varphi' = \frac{1}{r^2}$$

invullen in de andere vergelijking en vinden

$$r'' = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2}.$$

Het rechterlid is negatief als $r > 1$ en positief als $r < 1$. Dit betekent dat voor $r > 1$ de aarde naar de zon toe wordt getrokken, terwijl voor $r < 1$ de aarde juist van de zon wordt weggeduwd. Dit is precies wat een stabiele baan mogelijk maakt. Essentieel is hier dat de exponent 2 kleiner is dan 3. De $1/r^2$ in de formule staat nog steeds voor de grootte van de zwaartekrachtsversnelling. Deze is omgekeerd evenredig met r^2 omdat de zwaartekracht zich moet verdelen over de oppervlakte van een bol met straal r. De exponent 2 is gelijk aan $3-1$, waarbij 3 de dimensie van onze ruimte is. In een 4-dimensionale ruimte zou de 2 dus een 3 worden en het gegeven argument voor stabiele planeetbanen niet meer geldig zijn. Hetzelfde geldt voor dimensie 5 en hoger. We zien dus dat stabiele banen alleen maar mogelijk zijn in dimensie ten hoogste 3.

Tenslotte laten we zien dat in dimensie 3 de baan zelfs door middel van een eenvoudige formule kan worden beschreven. We nemen daartoe als nieuwe *onafhankelijke* variabele φ (i.p.v. t) en als nieuwe *afhankelijke* variabele $w = \frac{1}{r}$. We krijgen dan, weer met de kettingregel,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{w} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{d\varphi}w^2 = -\frac{dw}{d\varphi},$$

en

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}(-\frac{dw}{d\varphi}) = -\frac{d^2w}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d^2w}{d\varphi^2}w^2,$$

zodat de vergelijking voor $r(t)$ overgaat in de volgende vergelijking voor $w(\varphi)$.

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = 1.$$

Oplossingen van deze vergelijking worden gegeven door $w = 1 + \varepsilon\cos\varphi$, ofwel

$$r = \frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Dit is de algemene formule voor een kegelsnede: $\varepsilon^2 = 0$ geeft een cirkel, $0 < \varepsilon^2 < 1$ een ellips, $\varepsilon^2 = 1$ een parabool en $\varepsilon^2 > 1$ een (tak van een) hyperbool. Voor de aarde is $\varepsilon = 0.0167$.