## 0.1 Vraagstukken 5

1 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $f(x_1, x_2) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Toon aan dat $f$ lokaal in elk punt een $C^1$-inverse heeft, maar niet globaal.

2 Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$f(x, y) = (x + 1 + (y + 2)^2, y + 1 + (x - 1)^2).$$

a) Toon aan dat er een omgeving $U \subset \mathbb{R}^2$ van $(\frac{3}{2}, -1)$ bestaat zo dat $f|_U$ een inverse heeft. Noem die inverse $g$ en bepaal $g'(\frac{7}{2}, \frac{1}{4})$.

b) Schets het beeld van de lijn $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 3\}$ onder $f$. Welke punten op $f(L)$ zijn het beeld van slechts één punt?

c) Is $f$ globaal inverteerbaar? Zijn er punten waar $f$ niet lokaal inverteerbaar is?

3 Beschouw de functie $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz - 4,$$

en de verzameling $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x, y, z) = 0\}$. Laat $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ zo dat $x_0 + y_0 \neq 2z_0$.

a) Laat zien dat $z$ in een omgeving $U$ van $P_0$ kan worden opgelost als een functie $z : (x, y) \to z(x, y)$.

b) Bepaal de stationaire punten van die functie.

c) Wat zijn de maximale en minimale waarde van $z$ op $M$?

4 De afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $f(x, y) = y^3 - x^2$. Laat zien dat $f(x, y) = 0$ impliciet een functie $y = g(x)$ definieert voor alle $x \in \mathbb{R}$, maar dat $g$ niet differentieerbaar is in $x = 0$. Is dat in tegenspraak met de impliciete functie stelling? Leg uit.

5 Gegeven is de vergelijking $ye^{-y} = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}-x}$.

a) Laat zien dat er een functie $\phi : U \to V$ bestaat, met $U$ een omgeving van $x = 1$, zo dat $\phi(1) = \frac{1}{2}$, en zo dat $x$ en $y = \phi(x)$ voldoen aan de vergelijking voor alle $x \in U$.

b) Bewijs dat de in (a) genoemde functie $\phi$ een maximum heeft in $x = 1$.