Tentamen Analyse II 24-4-2001

Opgave 1

Zij $f(x,y) = \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$ voor $(x,y) \neq (0,0)$, en $f(0,0) = 0$.

a. Laat zien dat f continu is in $(0,0)$.

b. Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ met behulp van de definitie.

c. Onderzoek of f differentieerbaar is in $(0,0)$.

Opgave 2

Zij $f(x,y) = (x^2+y^2-2)(xy-1)$.

a. Schets het tekenverloop van f.

b. Wat kun je nu zeggen over de punten $(1,1)$ en $(-1,-1)$?

c. Bepaal de stationaire punten en de extremen van f.

Opgave 3

Zij $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty) \times [0,\infty)$ gegeven door $f(x,y) = (x^2+y^2, xy)$.

a. Laat zien dat voor $x \neq y$ de functie f locaal inverteerbaar is. Noem $f(x,y) = (t,w)$, en bepaal ook de afgeleide van $f^{-1}(t,w)$ in die punten die beeld zijn van een punt waarvoor $x \neq y$.

b. Ga na of f ook globaal inverteerbaar is.

Opgave 4

a. Zij $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$. Ga na of $f(x,y)$ voldoet aan een Lipschitz-conditie in de variable y in een omgeving van de oorsprong.

b. Los de differentiaal vergelijking $y' = f(x,y)$ op.

c. Bepaal voor de algemene oplossing $y(x)$ de volgende limieten: $\lim_{x\downarrow 0} y(x)$ en $\lim_{x\uparrow 0} y(x)$.

Opgave 5

Los de volgende differentiaalvergelijkingen op

a. $y' + y = x^2$

b. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin(x)$

c. Los het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen op

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + 2z \\ y' &= 6x + y \\ z' &= 2x + z \end{aligned}$$

Opgave 6

Gegeven is een functie $f(x)$ op het interval $(-\pi, \pi]$ door $f(x) = 0$ voor $x < 0$ en $f(x) = e^x$ voor $x > 0$.

a. Bereken de Fouriercoefficienten van f.

b. Bereken door een geschikte waarde van x te nemen de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{1 + k^2}.$$

Beargumenteer wat u doet.

Normering	1a:3	2a:3	3a:4	4 a:3	5a:3	6a:4
	b:3	b:3	b:3	b:3	b:3	b:4
	c:4	c:4		c:3	c:4	

Cijfer hele tentamen $= 1 + \frac{\text{aantal punten}}{6}$