Faculteit der Exacte Wetenschappen	Wiskundige Analyse II
Vrije Universiteit	Deeltentamen 29-10-2001

Opgave 1

Zij $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ voor $(x,y) \neq (0,0)$, en $f(0,0) = 0$.

a. Laat zien dat f continu is in $(0,0)$.

b. Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ met behulp van de definitie.

c. Onderzoek of f differentieerbaar is in $(0,0)$.

Opgave 2

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 - 1)$.

a. Schets het tekenverloop van f.

b. Wat kun je nu zeggen over de punten $(0,0)$, $(1,\pm 1)$ en $(-1,\pm 1)$?

c. Bepaal de stationaire punten en de extremen van f.

Opgave 3

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = \sinh(x+y)\sin(x-y).$$

a. Bepaal de Taylorontwikkeling van f rond $(0,0)$ tot en met termen van graad vier.
Aanwijzing: $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Gebruik de bekende Taylorontwikkelingen van e^t en $\sin t$.

b. Laat met behulp van a zien dat $(0,0)$ een stationair punt is van f maar dat f geen extreme waarde aanneemt in $(0,0)$.

Opgave 4

De functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y, z) = x^2 - y^2$. Verder is $G \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door $G = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

a. Geef aan waarom f op G een maximum en een minimum aanneemt.

b. Bepaal de extreme waarden van f op G.

Opgave 5

Zij $v = (v_1, v_2, v_3)$ een vaste vector in $\mathbb{R}^3$, en definieer $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als de functie

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2v_3 - x_3v_2, x_3v_1 - x_1v_3, x_1v_2 - x_2v_1).$$

a. Laat zien dat $f[\mathbb{R}^3] \subset \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0\}$.

b. Bepaal f'.

We bekijken $G = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$.

c. Zij $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in G$. Dan kan in een omgeving van dat punt G gezien worden als de grafiek $x_3 = g(x_1, x_2)$ van een C^1-functie $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (waar U een omgeving is van (x_1^0, x_2^0)). Laat zien hoe dat uit de impliciete functiestelling volgt, en bepaal g'.

In feite kun je natuurlijk $U = \mathbb{R}^2$ nemen, en je kunt een formule voor g ook opschrijven ($g(x_1, x_2) = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$). In de volgende twee onderdelen van de som stellen we ons steeds op dat standpunt, dus is g op heel $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd.

d. Zij nu $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door $h(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, g(x_1, x_2))$. Bepaal h'.

In het laatste onderdeel van deze som nemen we voor v de vector $v = (0, 1, 1)$. Definieer $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$k(x_1, x_2) = (h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

e. Laat zien dat k lokaal inverteerbaar is in elk punt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Normering

1a:2	2a:2	3a:4	4 a:2	5a:1
b:2	b:2	b:4	b:4	b:1
c:3	c:3			c:2
				d:2
				e:2

Cijfer hele tentamen $= 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$