Met wiskunde naar de zon

Ger Koole, Vrije Universiteit Amsterdam

Pythagoras 42(5):12–15, april 2003

Een korte vakantie naar de zon hoeft niet duur meer te zijn, voor minder dan 100 Euro vlieg je al naar Nice of Barcelona en terug. Hoe kan dat zo goedkoop zijn? In dit artikel bekijken we welke rol wiskunde daar in speelt.

1 Wat is opbrengstmanagement?

Luchtvaartmaatschappijen maken ruim van tevoren hun dienstregelingen. Daarin leggen ze vast op welke tijdstippen er naar welke bestemmingen gevlogen gaat worden. Meestal ligt dan ook (vrijwel) vast met welke vliegtuigen er gevlogen wordt. De vervoerscapaciteit is dus gegeven, de vraag is nu: hoe kan er zoveel mogelijk geld verdiend worden met de beschikbare stoelen? Het voordeel van een luchtvaartmaatschappij is dat zij allerlei mogelijkheden heeft om dezelfde stoelen voor verschillende prijzen te verkopen. De persoon naast je, onderweg in het vliegtuig naar het zonnige Nice, heeft misschien het dubbele of meer betaald voor haar ticket omdat ze laat geboekt heeft, of omdat ze dezelfde dag teruggaat. Het slim inzetten van de beschikbare capaciteit met als doel zoveel mogelijk geld te verdienen heet *opbrengstmanagement*. Vrijwel elke luchtvaartmaatschappij gebruikt opbrengstmanagement: van een grote Amerikaanse maatschappij is weleens beweerd dat het ze op jaarbasis 1 miljard dollar aan opbrengst scheelt! Opbrengstmanagement is mogelijk als er een vaste capaciteit beschikbaar is, en als er de mogelijkheid van prijsdifferentiatie. Dit is het geval in de luchtvaart, maar ook bij bijvoorbeeld hotels en autoverhuurbedrijven. Het zou ook kunnen worden gebruikt bij bioscopen en theaters. Dit zou neerkomen op hogere prijzen in het weekend en voor late boekers.

2 Hoe werkt opbrengstmanagement?

Opbrengstmanagement is een combinatie van marketing en wiskunde. De marketeers stellen de prijscategorieën vast, de wiskundigen bepalen op elk moment voor welke prijzen er capaciteit beschikbaar moet zijn. Doel daarbij is de totale opbrengst te maximaliseren. Er zijn twee omstandigheden die dit moeilijk maken. De eerste is dat klanten die bereid zijn veel te betalen meestal laat boeken. Dit betekent dat er capaciteit gereserveerd moet worden voor de duurdere categorieën klanten. Hoeveel? Dit hangt af van de vraag naar deze tickets. Maar dan komt de tweede complicatie om de hoek kijken: de vraag naar de verschillende soorten producten is moeilijk te voorspellen. Opbrengstmanagement bestaat wiskundig gezien dan ook uit twee onderdelen: het voorspellen van de vraag en, gegeven die vraag, het maximaliseren van de opbrengst. Hierbij moet je je realiseren dat, hoe goed je de vraag ook kan voorspellen, het toeval altijd een rol zal blijven spelen.

3 Een wiskundig model

We bespreken een wiskundig model dat niet al te moeilijk is en dat beide aspecten goed duidelijk maakt. We beschouwen een willekeurige vlucht op een willekeurige dag, met in totaal B stoelen van dezelfde soort. Stel dat er twee typen klanten zijn, waarbij type 1 altijd later boekt dan type 2. Type 1 brengt r_1 Euro op, en type 2 r_2. We zagen dat dure klanten later boeken, en inderdaad, $r_1 > r_2$. We zijn niet zeker van de vraag naar type 1-tickets: met kans p_k is de vraag k, met $\sum_{k=0}^{B} p_k = 1$. Type 2-tickets zijn zo voordelig dat we er zoveel van kunnen verkopen als we willen. De grote vraag is nu: hoeveel tickets van type 2 moeten we verkopen zodat we de verwachte winst maximaliseren?

Laten we deze vraag eens anders stellen: als we al N tickets hebben verkocht, is het dan verstandig nog een $N+1$-de ticket te verkopen? Als we dat doen hebben we een directe opbrengst van r_2 Euro. Anderzijds, als we wachten op type 1 klanten hebben we een kans op r_1 opbrengst. De grootte van deze kans q_N bepaalt of het zin heeft niet meer dan N goedkope tickets te verkopen. Wat is q_N? q_N is de kans dat er $B-N$ of meer tickets aan klasse 1 worden verkocht, dus $q_N = \sum_{k=B-N}^{B} p_k$. De optimale N is dus die N waarvoor geldt $r_2 \approx q_N r_1$. Als je q_N als functie $q(N)$ schrijft en aanneemt dat deze functie als domein $[0, B]$ heeft, dan is de optimale waarde dus $N = q^{-1}(r_2/r_1)$. Daarna rond je af naar hele stoelen.

4 Hoe verder?

De wiskundige heeft zijn werk gedaan, en heeft ervoor gezorgd dat zijn werkgever zoveel mogelijk verdient. Toch vertrekken er elke dag nog steeds vliegtuigen met onbezette stoelen, en moet men ook elke dag type 1 klanten teleurstellen wegens gebrek aan plaats, teveel goedkope stoelen verkocht op deze vlucht! Is daar niet iets aan te doen? De prijsvechters zoals Basiqair en Easyjet die juist zoveel met opbrengstmanagement doen zijn er nog niet aan begonnen, maar bij de grote maatschappijen komt het volgende tafereel vaak voor. Bij het inchecken of bij de poort worden reizigers verzocht tegen geldelijke vergoeding een andere vlucht te nemen. Vooral bij Amerikaanse luchthavens levert dat soms mooi theater op. Wat schiet een maatschappij daar nu mee op? Wat je niet ziet is dat zich kort daarvoor een klant van type 1 heeft gemeld, die grif r_1 heeft betaald voor een stoel die eigenlijk gereserveerd was voor iemand die r_2 heeft betaald. Als die nu bereid is voor minder dan $r_1 - r_2$ een vlucht later te nemen, schiet iedereen er wat mee op, de reizigers en de luchtvaartmaatschappij! Laten we aannemen dat de gemiddelde budgetreiziger tegen contante betaling van $c < r_1 - r_2$ bereid is een andere vlucht te nemen. Wat is dan de nieuwe optimale N? De optimale N is nu die waarvoor geldt $r_2 + q_N(r_1 - c - r_2) \approx q_N r_1$. Met behulp van de functienotatie krijgen we dan $N = q^{-1}(r_2/(r_2 + c))$. Omdat $r_2 + c < r_1$ en omdat q een stijgende functie is zien we dat als we overboeken toestaan we meer kaarten verkopen. We verdienen ook meer (reken dit zelf door), en we laten geen dure reizigers meer staan, tenzij het hele vliegtuig er mee vol zit. Zo zie je: meer verkopen dan je hebt lijkt op het eerste oog heel onverstandig, maar levert bij nader inzien veel geld op. Het wachten is tot Easyjet en Basiqair ermee beginnen.