Wiskunde nu

- Afdeling Wiskunde
- Onderwijs
- Onderzoek

Afdeling Wiskunde

- In recente jaren aanzienlijk uitgebreid en verjongd

- Nu $\pm$ 25 vaste medewerkers en postdocs, ook aanzienlijk aantal deeltijd hoogleraren die hun voornaamste werkkring elders hebben

- $\pm$ 25 aio's en oio's (promotiemedewerkers) waaronder veel buitenlanders

Onderwijs

- Beginnen nu met dingen die 10 jaar terug middelbare school stof waren

- Onderwijsprogramma sterk veranderd: meer toepassingen en toegepaste wiskunde, o.a. speciale richting Wiskunde met Levenswetenschappen

- Grote delen van het onderwijsprogramma nog steeds herkenbaar voor oud-studenten

Onderzoek

- Stochastiek: statistiek, kansrekening en besliskunde

- Analyse: (partiële) differentiaalvergelijkingen, dynamische systemen, operatorentheorie, systeemtheorie

- Topologie, in toekomst ook weer meetkunde/algebra

Topologie

Studie van symmetriegroepen van fractale verzamelingen. Naast algebraïsche structuur is ook de topologische structuur van zulke symmetriegroepen van belang.

Gegeven een analytische functie is er een tweedeling van het complexe vlak in de Fatouverzameling (daarop gedraagt de functie zich ordelijk) en de Juliaverzameling (daarop gedraagt de functie zich chaotisch).

Het vermoeden bestaat dat de symmetriegroepen van verschillende bekende fractale structuren sterk gerelateerde zijn aan de topologische structuur van de verzameling van eindpunten van de Juliaverzameling.

Statistiek

Modeleren van het genetisch netwerk dat ten grondslag ligt aan groei en ontwikkeling van neuronen. Doel is om statistische en computationele methoden te ontwikkelen voor
1. het bouwen van een model voor de initiële genetische acties die ten grondslag liggen aan groei en verlenging van neuronen,
2. het vinden van regulerende delen in genen die verantwoordelijk zijn voor coördinatie van groei van neuronen.

Hiervoor worden twee statistische benaderingen gecombineerd met modelering van het genetisch netwerk, met genetische sequentie analyse en met informatie in bestaande databanken.

Analyse/systeemtheorie

Chemische reactienetwerken in de cel. Voorbeeld: glycolyse in Trypanosoma brucei (onderzoek van biologen VU).

Wiskundig model al opgesteld door biologen. Wordt nu bewerkt tot model waar wiskundigen wat aan kunnen zien. Leidt tot stelsel van 10 gekoppelde niet-lineaire differentiaalvergelijkingen met extra variabelen:

$$x'(t) = f(x(t), u(t))$$

x is 10-dimensionaal, u is 21-dimensionale vector. Componenten van die laatste vector zijn enzymconcentraties. Sommige daarvan zijn beïnvloedbaar.

Vragen:
- wat is bij gegeven waarden van u de "steady state", d.w.z. de oplossing waarbij x constant is,
- wat is de invloed van veranderingen van u op die steady state,
- kunnen we het model goed benaderen met een model in minder dimensies?

Dit is een "speelgoed" probleem om methoden op uit te proberen voor veel grotere stelsels vergelijkingen die ingewikkelder reactienetwerken in de cel beschrijven.

Nu een leuk stukje wiskunde

ter vermaak (hoop ik dan maar)

Harmonische reeks

Herinner: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

Wat was dat ook alweer?

N-de partiële som:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

Bewering:

$$\lim_{N \to \infty} S_N = \infty$$

Simpel zat:

$$1 + \tfrac{1}{2} = 1\tfrac{1}{2}$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) > 2$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) > 2\tfrac{1}{2}$$
$$\vdots$$

en zo verder.

Hoeveel termen heb je wel nodig om boven de 10 uit te komen? En boven 100? En boven 1000?

Even tellen .... Met N groepen na de eerste 1, waarbij de som van elke groep tenminste $\frac{1}{2}$ is, hebben we:

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \cdots (\frac{1}{2^{N-1}} + \cdots + \frac{1}{2^N}) > 1 + \frac{1}{2}N.$$

Het aantal termen in deze sommatie is

$$\begin{aligned} & 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{N-1} \\ = \; & 1 + \sum_{j=0}^{N-1} 2^j. \end{aligned}$$

Meetkundige reeks: $\sum_{j=0}^{N-1} 2^j = 2^N - 1$.

Dus het aantal termen om op deze manier zeker boven

$$1 + \frac{1}{2}N$$

uit te komen is

$$2^N.$$

Welnu: $1 + \frac{1}{2}N = 10$ geeft $N = 18$.

Som	10	100	1000
N	18	198	1998
# termen	$2^{18} = 262144$	$2^{198} \approx 4 \cdot 10^{59}$	2^{1998}

Bedenk $2^{10} \approx 1000 = 10^3$, dus
$2^{1998} \approx (2^{10})^{199} \approx (10^3)^{199} = 10^{597}$.

Kunnen we iets preciezer zijn?

Integraalcriterium

Stelling 1. *Laat* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *een reeks van positieve getallen zijn. Veronderstel er is een functie* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ *zo dat*

1. f *is monotoon dalend en continu*

2. $f(n) = a_n$.

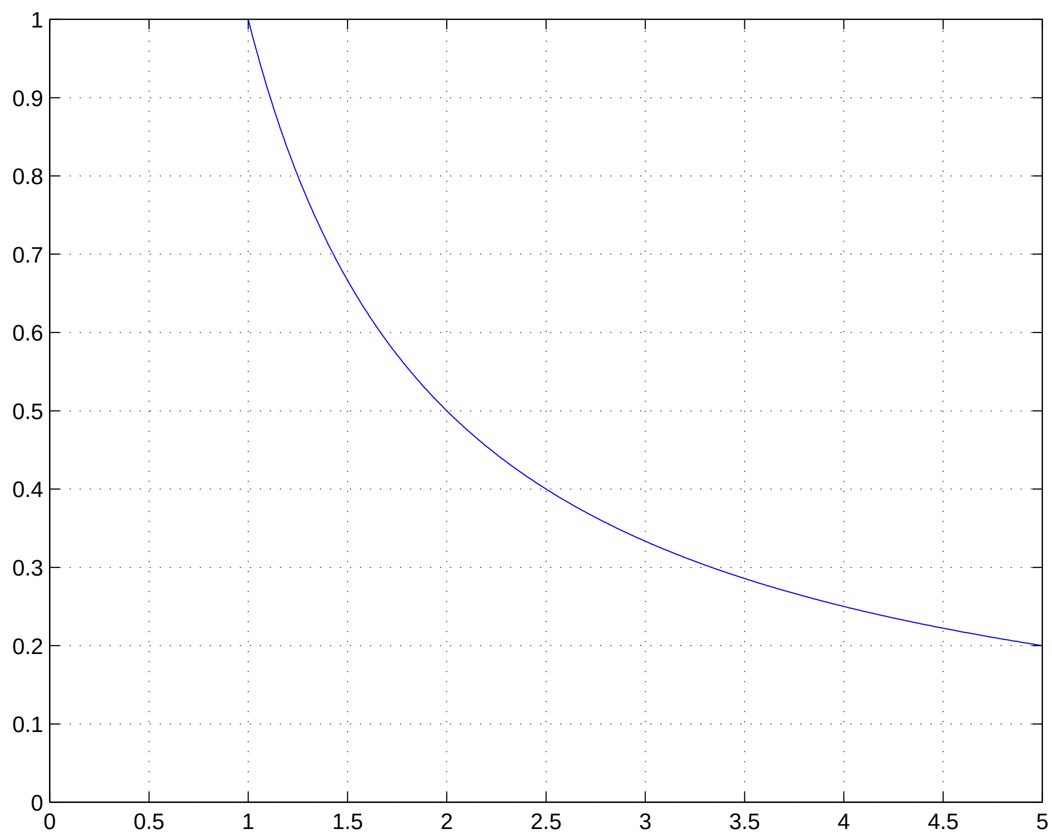
Dan geldt:

$$\text{(a) } 0 < \sum_{n=1}^{N} a_n - \int_1^{N+1} f(x)\,dx < f(1) = a_1$$

en

$$\text{(b) } \lim_{N\to\infty} (S_N - \int_1^{N+1} f(x)\,dx) \quad bestaat.$$

Bewijs: plaatje.



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Onderdeel (b) volgt uit stijgend en begrensd zijn van de getallen

$$\sum_{n=1}^{N} a_n - \int_1^{N+1} f(x)\,dx$$

Pas toe op

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{en} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

Dan

$$0 < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\, dx < 1$$

dus

$$0 < S_N - \ln(N+1) < 1.$$

Dus als we willen dat $S_N = 10$ dan

$$0 < 10 - \ln(N+1) < 1,$$

$$9 < \ln(N+1) < 10$$

ofwel

$$e^9 \approx 8104 < N+1 < e^{10} \approx 22027.$$

Dat scheelt een slok op een borrel!

Even naar die limiet kijken:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N+1)\right)=\gamma$$

bestaat.

Die constante heet de constante van Euler $\quad \gamma \approx 0,577215$

Verrassend: *onbekend* of γ rationaal is of niet.

Dus

$$\begin{aligned} S_N &\approx \ln(N+1) + 0,577215 \\ 10 &\approx \ln(N+1) + 0,577215 \end{aligned}$$

Dat geeft

$$N + 1 \approx e^{(10-0,577215)} \approx 12367$$

Dus je hebt

$$N \approx 12366$$

termen nodig in de reeks om voorbij 10 te komen:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{12366} \approx 10$$

Controle met Matlab

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{12366} &= 9.99996214792161\\
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{12367} &= 10.00004300827578
\end{aligned}
$$

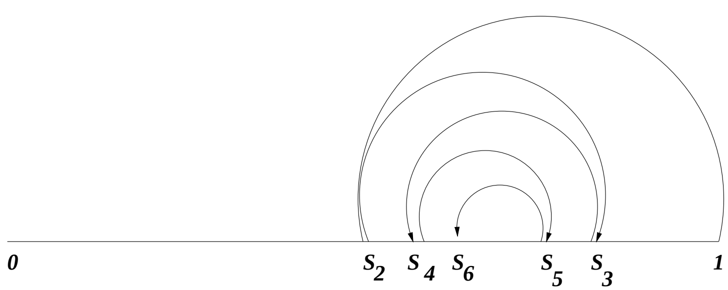
Alternerende reeksen

Bekijk de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdots$$

We kennen allemaal nog wel het criterium van Leibniz

dat zegt dat deze reeks convergeert.



Maar wat is de uitkomst??

Bekijk

$$
\begin{aligned}
T_{2N} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N} \\
&\quad -2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2N}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N} \\
&\quad -(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}) \\
&= S_{2N} - S_N
\end{aligned}
$$

Nu:

$$\lim_{N\to\infty}(S_N - \ln(N+1)) = \gamma$$

en dus ook

$$\lim_{N\to\infty}(S_{2N} - \ln(2N+1)) = \gamma$$

en daarmee

$$\lim_{N\to\infty}(S_{2N} - S_N - \ln(2N+1) + \ln(N+1)) = 0$$

Dan volgt

$$\lim_{N\to\infty} T_{2N} = \lim_{N\to\infty} \ln(\frac{2N+1}{N+1}) = \ln 2.$$

Conclusie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2.$$

Even husselen:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Andere reeks, maar zelfde getallen, ook weer convergent.

Groepeer termen even in drieën:

$$Q_{3N} = (1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}) + \cdots (\frac{1}{4N-3} + \frac{1}{4N-1} - \frac{1}{2N})$$

is de $3N$'de partiële som van deze reeks.

Herschrijf als

$$Q_{3N} = S_{4N} - \frac{1}{2}S_{2N} - \frac{1}{2}S_N.$$

Nu hetzelfde type argumentje:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} S_{4N} - \ln(4N+1) &= \gamma \\
\lim_{N\to\infty} -\frac{1}{2}(S_{2N} - \ln(2N+1)) &= -\frac{1}{2}\gamma \\
\lim_{N\to\infty} -\frac{1}{2}(S_N - \ln(N+1)) &= -\frac{1}{2}\gamma
\end{aligned}$$

Optellen, gebruik wat eigenschappen van de logarithme:

$$\lim_{N\to\infty} Q_{3N} = \lim_{N\to\infty} \ln\left(\frac{4N+1}{\sqrt{2N+1}\sqrt{N+1}}\right) = \ln\frac{4}{\sqrt{2}} = 1\frac{1}{2}\ln 2$$

Conclusie

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots = 1\frac{1}{2}\ln 2.$$

Maar

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots = \ln 2.$$

Hoe zat dat ook al weer? Twee stellingen

- Als $\sum |a_n|$ convergent is dan is de uitkomst van

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

onafhankelijk van de volgorde waarin je optelt.

- Als $\sum a_n$ convergent is, maar $\sum |a_n|$ niet, dan kun je voor *elk* reëel getal α een volgorde van $a_1, a_2, a_3, \cdots$ vinden zó dat de som van de getallen in *die* volgorde α oplevert.