Nu een leuk stukje wiskunde
ter vermaak (hoop ik dan maar).

Optellen van oneindig veel getallen

Ter inleiding: tellen

- Turven, maar: onhandig bij grote aantallen.

- Romeinse cijfers: speciale symbolen voor grote getallen, maar: onhandig rekenen.

M	1000	X	10
D	500	V	5
C	100	I	1
L	50		

- Tientallig stelsel: handige notatie, handig rekenen.

Bij de slide hiervoor doe ik even: MDCLXXXVI. Je moet er echt even over nadenken om te zien dat hier 1686 staat.

Tot rond het jaar 1200 werd in Europa alleen maar gewerkt met Romeinse cijfers en met turven. Het tientallig stelsel en rekenen daarin bereikte Europa pas rond die tijd. Het werd 'bij ons' overgenomen van de Arabieren, die het op hun beurt weer uit India hadden.

In het tientallig stelsel met positie notatie is 1686 een korte schrijfwijze voor: $1 \times 1000 + 6 \times 100 + 8 \times 10 + 6 \times 1$. Merk op dat je hierbij eigenlijk aan de rechterkant van het getal moet beginnen, je leest het getal als het ware niet van links naar rechts maar van rechts naar links. Dat hebben we aan de Arabieren te danken, die immers van rechts naar links schrijven.

Merk op: in het getal 201 is de nul belangrijk, hoewel die voor 0×10, dus voor niets staat, is het belangrijk omdat toevoegen van de nul je vertelt dat de 2 voor 2×100 staat. Die nul is ook een Indische uitvinding, die ook pas rond 1200 via de Arabische cultuur tot Europa kwam.

Positie notatie

Wat stelt een getal als $512,3678$ voor?

$$512,3678 = 5\times100+1\times10+2\times1+3\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{100}+7\times\frac{1}{1000}+8\times\frac{1}{10.000}$$

Machten van 10

Voor de komma:
$100 = 10 \times 10 = 10^2$,
$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$,
$10.000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$,
enzovoorts.

Speciale afspraken: $10^1 = 10$, en $10^0 = 1$.

Achter de komma:
$\frac{1}{10} = 10^{-1}$,
$\frac{1}{100} = 10^{-2}$,
$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$,
enzovoorts.

Bij de vorige slide doe ik ook even machten van 2, 3 en 1/2:

$$\begin{array}{lll} 2^2 = 4 & 3^2 = 9 & (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \\ 2^3 = 8 & 3^3 = 27 & (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} \\ 2^4 = 16 & 3^4 = 81 & (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} \\ 2^5 = 32 & 3^5 = 243 & (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32} \\ 2^6 = 64 & 3^6 = 729 & (\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64} \end{array}$$

Wat is dan precies het getal $0,17171717\cdots$?

$$0,17171717\cdots = 17\times\frac{1}{100}+17\times(\frac{1}{100})^2+17\times(\frac{1}{100})^3+17\times(\frac{1}{100})^4+\cdots$$

Laten we voor het gemak dat getal eens S noemen. Merk op dat we eigenlijk om S te kunnen uitrekenen *oneindig veel* getallen bij elkaar moeten optellen.

Mooie truc!

Om het getal S te bepalen voeren we een trucje uit. Vermenigvuldig het getal met 100, en vergelijk het dan eens met S:

$$\begin{aligned} 100 \times S &= 17{,}171717\cdots \\ S &= 0{,}17171717\cdots \end{aligned}$$

Nu zien we wat we moeten doen om het getal te berekenen: trek die twee dingen eens van elkaar af! Dan krijgen we

$$100 \times S - S = 17.$$

Dus $99 \times S = 17$, en dus is $\frac{99\times S}{99} = \frac{17}{99}$. Conclusie: $S = \frac{17}{99}$.

Dit is zo'n mooie truc, ik kan het niet nalaten er nog een paar te doen:

$$S = 0,3333333\cdots$$

Natuurlijk moet je nu met 10 vermenigvuldigen. $10 \times S - S = 3$, dus $S = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Je ziet dan al dat je de breuk die ontstaat soms moet vereenvoudigen.

Nog eentje:

$$S = 0,142857142857142857\cdots$$

Nu moet je met 10^6 (een miljoen dus) vermenigvuldigen:

$$10^6 \times S - S = 142.857,$$

en dus $S = \frac{142.857}{999.999}$. Je moet het al van te voren weten om te zien dat dit eigenlijk $\frac{1}{7}$ is.

Als er tijd is laat ik ook nog even zien dat $0,2373737\cdots = 0,2 + 0,037373\cdots$ gelijk is aan $\frac{2}{10} + \frac{37}{990} = \frac{235}{990}$.

Dan komt de algemene opmerking: elk getal dat uiteindelijk repeteert is 'dus' een breuk, en omgekeerd, elke breuk is een getal dat in decimale notatie uiteindelijk gaat repeteren. Dat laatste is wel wat lastiger om in te zien, en dat laten we dus ook nu niet zien. Het is een mooi sommetje.

De volgende slide is een overgang naar een ander onderwerp en wordt ook als zodanig gepresenteerd. Wat wel hetzelfde blijft is dat we het nog steeds hebben over het optellen van oneindig veel getallen.

Harmonische reeks

We bekijken de volgende som:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Wat bedoelen we daarmee precies?

N-de partiële som (N-de gedeeltelijke optelling):

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}.$$

Bewering: als je nu N maar steeds groter en groter laat worden, dan wordt de uitkomst van deze som uiteindelijk groter dan elk willekeurig getal. In wiskundige termen: de limiet is oneindig

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \infty.$$

Hoe zie je nu dat dit waar is?

Simpel zat: groepeer de termen

$$
\begin{gathered}
1+\tfrac{1}{2}=1\tfrac{1}{2} \\
1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})>2 \\
1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})>2\tfrac{1}{2} \\
\vdots
\end{gathered}
$$

en zo verder. Dat komt dus boven elk getal uit, en dan zeggen we dat "de limiet oneindig is".

Let op de groepering van de termen: eerst een losse 1, dan 1 term, dan 2 termen, dan 4, dan 8, dan 16, enzovoorts.

Hoe snel wordt het dan groot?

Hoeveel termen heb je nodig om boven de 10 uit te komen? En boven 100? En boven 1000?

Even tellen .... Met N groepen na de eerste 1, waarbij de som van elke groep tenminste $\frac{1}{2}$ is, hebben we:

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\cdots(\frac{1}{2^{N-1}}+\cdots+\frac{1}{2^N})>1+\frac{1}{2}N.$$

Het aantal termen in deze sommatie is 2^N, en aan de andere kant ook

$$1+1+2+4+8+\cdots+2^{N-1}.$$

Intermezzo: meetkundige reeks

Wat is de uitkomst van $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{N-1}$? Kennelijk is dat $2^N - 1$.
Eerst maar eens voor $N = 11$.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 \\ 2 \times S &= \quad 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 \end{aligned}$$

Dus $S = 2 \times S - S = 2048 - 1 = 2047$.

Wat is de uitkomst voor algemene N? Het idee is hetzelfde:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{N-1} \\ 2 \times S &= \quad 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{N-1} + 2^N \end{aligned}$$

Dus $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{N-1} = 2^N - 1$.

De truc die we hier zien is: vermenigvuldig S met twee, en trek dan S er van af. Dat is vrijwel dezelfde truc die we eerder zagen. Toen vermenigvuldigden we met een macht van tien.

Op die manier kun je bijvoorbeeld ook het volgende zien:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots .$$

Vermenigvuldig S met $\frac{1}{2}$, en trek het resultaat van S af. Dan krijg je weer dat er heel veel wegvalt. Het resultaat is dat $\frac{1}{2} \times S = 1$, en dus $S = 2$. Hier hoort het verhaal van Achilles en de schildpad bij....

Zo ook:

$$3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \frac{3}{625} + \cdots .$$

Vermenigvuldig met $\frac{1}{5}$, en trek het resultaat van het origineel af: deze optelling geeft $\frac{15}{4}$.

Terug naar de harmonische reeks

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \cdots (\frac{1}{2^{N-1}} + \cdots + \frac{1}{2^N}) > 1 + \frac{1}{2}N.$$

Het aantal termen is

$$1 + 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{N-1} = 2^N.$$

Welnu: $1 + \frac{1}{2}N = 10$ geeft $N = 18$.

Som	10	100	1000
N	18	198	1998
# termen	$2^{18} = 262.144$	$2^{198} \approx 4 \times 10^{59}$	2^{1998} heel groot!

Kunnen we iets preciezer zijn?

Met Matlab: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{262.144} \approx 13,0539$. Dat is dus wel een beetje teveel. We wilden boven de 10 uitkomen, en nu komen we zelfs boven de 13. Wanneer komen we dan boven de 10? Enig experimenteren: je hebt (slechts) 12.367 termen nodig om boven de 10 te komen.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{12.366} &= 9,99996214792161 \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{12.367} &= 10,00004300827578 \end{aligned}$$

Hadden we dit met wat meer theorie ook kunnen zien? Jawel, maar dat vereist echt wat meer theorie (op het niveau van een eerstejaarswiskundevak).

Wat komt er in het werkcollege aan de orde?

- Meetkundige reeksen: $2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2 \times 3^N$ bijvoorbeeld, en
$$7 + \frac{7}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \cdots .$$

- De reeks
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots .$$
Heeft deze oneindige optelling een eindige uitkomst of niet?

Die eerste zou je nu zo moeten kunnen. Voor het tweede is er een truc die lijkt op de manier waarop we zagen dat $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$. Toen groepeerden we de termen, doen we nu weer:

$$S = 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{7^2}) + \cdots$$

Dus: eerst een losse 1, dan een groepje van 2, dan van 4, dan van 8 enzovoorts. In elk groepje is elke term kleiner dan of gelijk aan de eerste term. Dus

$$S \leq 1 + 2 \times \frac{1}{2^2} + 4 \times \frac{1}{4^2} + 8 \times \frac{1}{8^2} + \cdots .$$

Maar nu is de rechterkant een meetkundige reeks: er staat

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots .$$

Dat heeft als resultaat dat $S < 2$. Je kunt laten zien dat $S = \frac{\pi^2}{6}$, een heel verrassend resultaat, dat echter diepere wiskunde (tweedejaarsstof) vereist.