

# Wiskundige modellen voor filevorming

Dennis Roubos





*vrije Universiteit amsterdam*

# Wiskundige modellen voor filevorming

BWI-werkstuk

Dennis Roubos  
droubos@few.vu.nl



# Inhoudsopgave

|                                    |            |
|------------------------------------|------------|
| <b>Voorwoord</b>                   | <b>v</b>   |
| <b>Notatie</b>                     | <b>vii</b> |
| <b>1 Inleiding</b>                 | <b>1</b>   |
| <b>2 Basisbegrippen</b>            | <b>3</b>   |
| 2.1 Modellen                       | 5          |
| 2.2 Microscopische variabelen      | 5          |
| 2.3 Macroscopische variabelen      | 5          |
| 2.3.1 Intensiteit                  | 7          |
| 2.3.2 Snelheid                     | 7          |
| 2.3.3 Dichtheid                    | 7          |
| 2.3.4 Twee- en meerbaanswegen      | 7          |
| 2.4 Wetten                         | 8          |
| 2.5 Homogeniteit en Stationariteit | 9          |
| 2.6 Diagrammen                     | 9          |
| 2.6.1 Fundamenteel diagram         | 9          |
| 2.6.2 Plaats-tijd-diagram          | 13         |
| 2.7 Stabiliteit                    | 13         |
| <b>3 Modellen</b>                  | <b>17</b>  |
| 3.1 Microscopische modellen        | 17         |
| 3.1.1 Follow the leader            | 17         |
| 3.1.2 Cellulaire automaten         | 20         |
| 3.2 Macroscopische modellen        | 23         |
| 3.2.1 Behoud van voertuigen        | 23         |
| 3.2.2 LWR model                    | 24         |

|          |                                                          |           |
|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| 3.2.3    | Payne model . . . . .                                    | 25        |
| 3.3      | Wachtrijtheorie . . . . .                                | 26        |
| 3.3.1    | Basis . . . . .                                          | 26        |
| 3.3.2    | Verkeersmodel . . . . .                                  | 28        |
| 3.4      | Eigen model . . . . .                                    | 30        |
| <b>4</b> | <b>Simulatie</b>                                         | <b>35</b> |
| 4.1      | Werking . . . . .                                        | 35        |
| 4.2      | Plaats-tijd-diagram . . . . .                            | 35        |
| 4.3      | Tijdseenheid en plaatseenheid . . . . .                  | 36        |
| 4.3.1    | Cellulaire automaten . . . . .                           | 36        |
| 4.3.2    | Intelligent Driver Model . . . . .                       | 37        |
| 4.3.3    | Eigen model . . . . .                                    | 37        |
| 4.4      | Fundamentele diagrammen . . . . .                        | 37        |
| 4.5      | Instroom en uitstroom . . . . .                          | 38        |
| 4.6      | Initiële plaatsing . . . . .                             | 39        |
| 4.7      | Java Applet . . . . .                                    | 39        |
| 4.7.1    | Eigen model . . . . .                                    | 39        |
| <b>5</b> | <b>Resultaten</b>                                        | <b>43</b> |
| 5.1      | Uniforme simulatie . . . . .                             | 43        |
| 5.1.1    | Cellulaire automaten . . . . .                           | 43        |
| 5.1.2    | Cellulaire automaten model voor tweebaanswegen . . . . . | 49        |
| 5.1.3    | Intelligent Driver Model . . . . .                       | 51        |
| 5.1.4    | Eigen model . . . . .                                    | 51        |
| 5.2      | File simulatie . . . . .                                 | 54        |
| 5.2.1    | Cellulaire automaten . . . . .                           | 55        |
| 5.2.2    | Eigen model . . . . .                                    | 58        |
| <b>6</b> | <b>Conclusie</b>                                         | <b>59</b> |
|          | <b>Bibliografie</b>                                      | <b>61</b> |
|          | <b>Index</b>                                             | <b>63</b> |

# Voorwoord

Eén van de laatste onderdelen van de studie Bedrijfswiskunde & Informatica (BWI) is het BWI-werkstuk, waarin het bedrijfsgerichte aspect van de studie verwerkt dient te worden en waarbij tevens het wiskundige en/of het informatica aspect naar voren komt.

Tijdens mijn studie ben ik vooral geïnteresseerd geraakt in het optimaliseren van bedrijfsprocessen. Hierbij gaat het dan om het optimaliseren van processen teneinde een gewenste doelstelling te realiseren. In het derde jaar van de studie, heb ik samen met een aantal medestudenten een bedrijfscase gedaan bij het VU medisch centrum waar we de wachttijd voor een MRI-scan moesten analyseren en we deze probeerden te verkorten. In het vierde jaar heb ik een decision support system (DSS) gebouwd, ook met betrekking tot de gezondheidszorg.

Voor dit werkstuk heb ik gekozen voor een heel ander toepassingsgebied, namelijk filevorming. Persoonlijk vind ik wachtrijtheorie erg leuk en aangezien filevorming aansluit bij dat onderwerp, leek mij dit een geschikte keuze om daarover het BWI-werkstuk te doen. Mede nadat ik met mijn begeleider had gesproken over dit onderwerp, leek mij dat hier zeker wat mee te doen viel.

Uiteraard geldt dat filevorming gevolgen heeft voor bedrijven en dan ook voor de economie, waardoor het bedrijfsgerichte aspect zeker terug te vinden valt bij dit onderwerp. Daar dit werkstuk zal gaan over wiskundige modellen om files mee te beschrijven, is hiermee ook het wiskundige aspect van de studie erin verwerkt. Tot slot ontbreekt ook het informatica aspect niet, aangezien ik op basis van de wiskundige modellen een simulatieprogramma heb gemaakt om de diverse modellen visueel weer te geven.

Als laatste van dit voorwoord wil ik mijn begeleider, dr. Sandjai Bhulai, bedanken voor zijn hulp gedurende het proces van het schrijven van dit werkstuk.

*Dennis Roubos  
Aalsmeer, 2006*



# Notatie

|                 |                                                                                                                                              |        |                         |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------------------------|
| $x$             | Variabele voor het gebruik van de plaats.                                                                                                    |        |                         |
| $t$             | Variabele voor het gebruik van de tijd.                                                                                                      |        |                         |
| $\alpha$        | Index van voertuig, met $\alpha - n$ de $n$ -de voorganger van voertuig $\alpha$ .                                                           |        |                         |
| $l$             | Lengte van een voertuig.                                                                                                                     |        |                         |
| $h$             | Headway in plaats of in tijd van een voertuig, i.e., de afstand in plaats of tijd tussen de twee achterbumpers van opeenvolgende voertuigen. |        |                         |
| $g$             | Gap tussen twee voertuigen, i.e., de afstand in tijd tussen twee opeenvolgende voertuigen.                                                   |        |                         |
| $d$             | Afstand tussen twee voertuigen, i.e., de afstand in plaats tussen twee opeenvolgende voertuigen.                                             |        |                         |
| $x(t)$          | Plaats van een voertuig op tijdstip $t$ .                                                                                                    |        |                         |
| $v(t)$          | Snelheid van een voertuig op tijdstip $t$ .                                                                                                  |        |                         |
| $a(t)$          | Versnelling van een voertuig op tijdstip $t$ .                                                                                               |        |                         |
| $Q(x, t)$       | Intensiteit, i.e. aantal voertuigen per eenheid tijd,                                                                                        | $Q$    | Ingeval stationariteit. |
| $\rho(x, t)$    | Dichtheid, i.e. aantal voertuigen per eenheid weglengte,                                                                                     | $\rho$ | Ingeval stationariteit. |
| $V(x, t)$       | Gemiddelde snelheid, i.e. de afgelegde weg per eenheid tijd,                                                                                 | $V$    | Ingeval stationariteit. |
| $Q_{max}$       | Maximale intensiteit.                                                                                                                        |        |                         |
| $\rho_{file}$   | Dichtheid waarbij sprake is van een file met snelheid gelijk aan 0.                                                                          |        |                         |
| $\rho_c$        | Dichtheid waarbij sprake is van congestie.                                                                                                   |        |                         |
| $v_{max}$       | Maximale snelheid.                                                                                                                           |        |                         |
| $\mathbb{E}(X)$ | Verwachting van de stochastische variabele $X$ .                                                                                             |        |                         |
| $\sigma(X)$     | Standaard deviatie van de stochastische variabele $X$ .                                                                                      |        |                         |
| $\mathbb{R}$    | De verzameling van de reële getallen.                                                                                                        |        |                         |
| $\mathbb{R}_+$  | De verzameling van de positieve reële getallen (inclusief het getal 0).                                                                      |        |                         |
| $\mathbb{Z}$    | De verzameling van de gehele getallen.                                                                                                       |        |                         |
| $\mathbb{Z}_+$  | De verzameling van de positieve gehele getallen, i.e., $\{0, 1, 2, \dots\}$ .                                                                |        |                         |
| $L_q$           | Het gemiddelde aantal klanten in de wachtrij (exclusief de klant in bediening).                                                              |        |                         |
| $L$             | Het gemiddelde aantal klanten in het systeem.                                                                                                |        |                         |
| $W_q$           | De gemiddelde wachttijd per klant (exclusief de bedieningstijd).                                                                             |        |                         |
| $W$             | De gemiddelde wachttijd per klant in het systeem.                                                                                            |        |                         |



# Hoofdstuk 1

## Inleiding

Iedereen is er wel mee bekend en weet hoeveel ergernis files soms kunnen opwekken, zeker als we snel ergens moeten zijn in verband met een afspraak. Niet alleen hebben files invloed op individuen, maar ook hebben files gevolgen voor de economie. Het vrachtverkeer is voor onze economie van groot belang en ook zij ondervinden hinder van de files die op onze wegen staan, met als gevolg dat er ontzettend veel geld verloren gaat. De kosten die samenhangen met het ondervinden van vertraging, werden in 1995 geschat op 1.5 miljard guldens [11, p. 7]. We willen daarom de files graag oplossen, of tenminste zover mogelijk terugdringen.

Er zijn al veel voorstellen gedaan waarmee we de files zouden kunnen verkorten, te denken valt dan bijvoorbeeld aan rekeningrijden, spitsstroken of blokrijden, zoals te lezen valt in [16]. Al deze voorstellen zijn al dan niet gebaseerd op een wiskundig model.

Voordat files op een wiskundige manier bestudeerd kunnen worden, zal er eerst een model opgesteld moeten worden die zo een dergelijke rij voertuigen kan beschrijven. Wanneer een model voor handen is, kan naar een oplossing gezocht worden die dan wiskundig onderbouwd kan worden.

In dit werkstuk zal aandacht besteed worden aan diverse modellen voor filevorming die reeds bestaan. Dit gebeurt in hoofdstuk 3 waarin we zullen kijken naar microscopische en macroscopische modellen. Ook zal daar aandacht besteed worden aan een verkeersmodel waarbij gebruik gemaakt wordt van wachtrijtheorie en zal er aandacht besteed worden aan een eigen ontwikkeld model.

Na hoofdstuk 3 zijn er diverse modellen bekend die we als basis zullen gaan gebruiken bij de simulatie van filevorming. De werking en de uitleg van de simulatie zal besproken worden in hoofdstuk 4. De resultaten van de simulaties zullen worden besproken in hoofdstuk 5. Het voordeel van de simulatie is dat het hele proces van filevorming visueel in beeld wordt gebracht en de invloeden van de parameters uit het wiskundige model direct zichtbaar zijn.

Uiteraard zal het werkstuk ook een uitgebreide conclusie bevatten. Hierin zullen we terugkijken op de modellen en de resultaten die zijn gevonden in dit werkstuk. Dit gebeurt in hoofdstuk 6.

Echter, voordat we direct beginnen met de wiskundige modellen, zullen eerst wat basisbegrippen behandeld worden in hoofdstuk 2.



## Hoofdstuk 2

# Basisbegrippen

Het begrip file is eigenlijk een vaag begrip. De definitie van een file is dan ook niet eenduidig. Wat wel van belang is bij het begrip file is dat het om langzaam rijdend of stilstaand verkeer gaat. Het heeft dan niks te maken met de hoeveelheid voertuigen op een bepaald traject. Het gaat slechts om de snelheid van deze voertuigen. De VerkeersInformatieDienst in Nederland definieert een file als een verzameling van drie verschillende soorten stagnerend verkeer [2]:

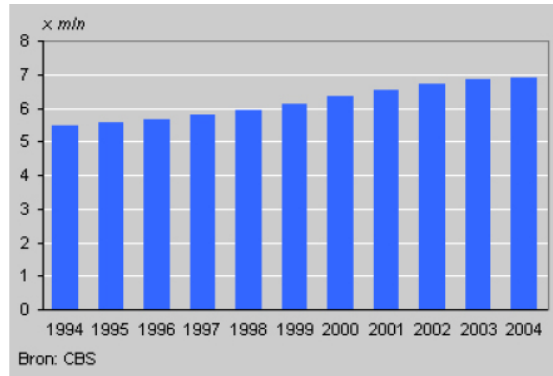
- *Langzaam rijdend verkeer* is verkeer dat niet harder rijdt dan 50 km/uur, maar doorgaans wel sneller rijdt dan 25 km/uur gedurende een traject van minimaal 2 kilometer.
- *Stilstaand verkeer* is verkeer dat vrijwel overal langzamer rijdt dan 25 km/uur gedurende een traject van minimaal 2 kilometer.
- Tot slot is er *langzaam rijdend tot stilstaand verkeer* wat verkeer is dat langzaam rijdt over een grote lengte met daarin gebieden met stilstaand verkeer.

In Nederland zijn er een aantal steden waarbij terugkerend files ontstaan. Per dag worden ongeveer 50 files waargenomen met een totale lengte van ongeveer 200 kilometer. Alhoewel dit cijfers zijn van een paar jaar geleden, geeft dit toch aan met welke grote aantallen we te maken hebben [11, p. 7].

Sinds 1 januari 1994 is het aantal auto's behoorlijk toegenomen. In 2004 was dit aantal al met iets meer dan een kwart toegenomen ten opzichte van 1994 (zie ook figuur 2.1). Echter, niet alleen de hoeveelheid auto's is toegenomen, maar ook is de verkeersdrukte in dezelfde periode toegenomen met ongeveer dertig procent.

Een voor de hand liggende oorzaak van filevorming is wel de *capaciteit*, ofwel het gebrek aan capaciteit om de grote hoeveelheid voertuigen aan te kunnen. We definiëren de capaciteit als de maximale stroom van voertuigen dat een weg aankan voordat er sprake is van filevorming. Files ontstaan bij een *bottleneck*.

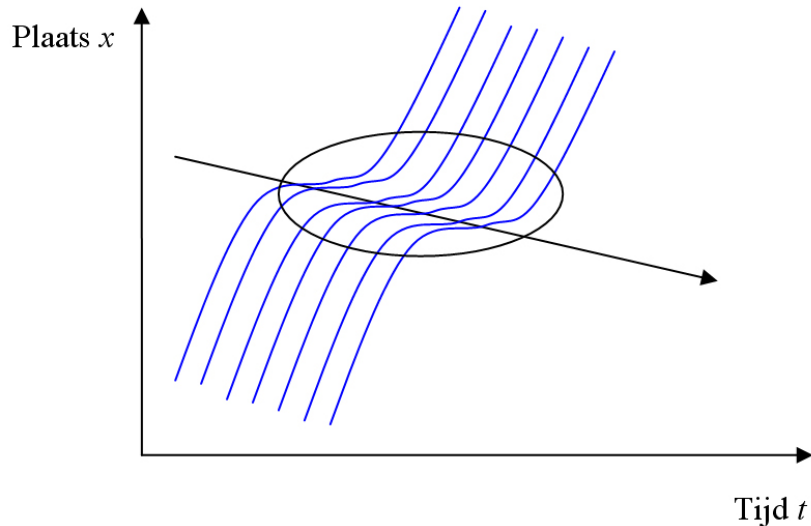
Een bottleneck kan gezien worden als een locatie waar verkeer samenkomt (bijvoorbeeld een invoegstrook op snelwegen) waardoor de totale verkeersstroom boven de maximale capaciteit uitkomt. Ook kan het een locatie zijn waar de capaciteit van de weg omlaag gaat en deze nieuwe capaciteit lager is dan verkeersstroom op dat moment. In beide gevallen zal er sprake zijn van filevorming ofwel *congestie*.



**Figuur 2.1.** Aantal auto's in Nederland (bron [5]).

Er zijn een aantal duidelijke punten te noemen die zorgen voor een lager wordende capaciteit van de weg. Te denken valt dan aan het voorkomen van ongelukken op de wegen, wegwerkzaamheden, afzettingen, en dergelijke. Het blijkt dat 75% van alle files ontstaan door structurele zaken als bruggen en tunnels en dat 25% van de files ontstaan door ongelukken en andere incidentele oorzaken [11, p. 7].

Het opmerkelijke van een file is dat deze zich naar achteren kan verplaatsen. In figuur 2.2, een zogenaamd *plaats-tijd-diagram*, valt bijvoorbeeld goed te zien dat de voorste voertuigen de file verlaten, terwijl achteropkomend verkeer juist de file naderen en achter aansluiten. Op deze manier verplaatst een file zich dus naar achteren. Het fenomeen van het naar achteren verplaatsen van de file hangt van een aantal condities af. In paragraaf 2.7 zal hierover het één en ander gezegd worden.



**Figuur 2.2.** Trajectories van voertuigen die het verloop van de plaats van een voertuig in de tijd aangeven.

## 2.1 Modellen

Om verkeer te modelleren zijn er drie typen modellen te onderscheiden, ieder met een verschillend detailniveau.

- *Microscopische modellen* beschrijven het plaats-tijd gedrag van individuele voertuigen op een weg, welke invloed ondervinden van andere voertuigen in zijn buurt.
- *Mesoscopische modellen* hebben iets minder detail blijkt uit het feit dat deze modellen geen individuele voertuigen onderscheiden, maar het gedrag van individuele voertuigen specificeren.
- *Macroscopische modellen* zien alle voertuigen eigenlijk samen als een geheel en het verkeer wordt gerepresenteerd door variabelen als dichtheid, intensiteit en snelheid.

Naast het verschil in detailniveau kan er ook onderscheid gemaakt worden in *continue* en *discrete* modellen. Continue modellen beschrijven de toestand van het verkeer continu, terwijl bij discrete modellen de toestandsveranderingen van het verkeer plaatsvinden op discrete tijdpunten.

Het laatste onderscheid dat we hier aanhalen betreft het onderscheid tussen *stochastische* en *deterministische* modellen. Stochastische modellen hebben iets willekeurigs in de zin van een random variabele, waardoor het model niet een set van exacte relaties is, zoals dat wel het geval is bij deterministische modellen. Stochastische modellen zijn meer natuurgetrouw, aangezien bijvoorbeeld niet iedere verkeersdeelnemer eenzelfde reactietijd heeft. Ingeval van stochastische modellen kan de reactietijd als een random variabele opgevat worden die een bepaalde kansverdeling bezit.

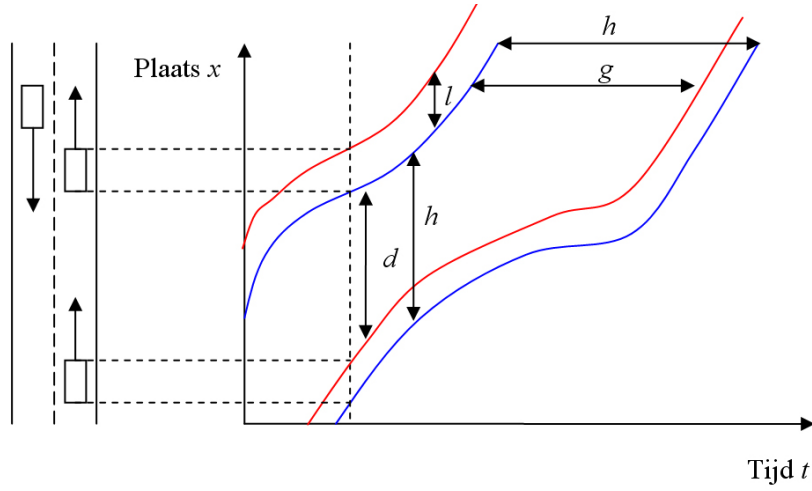
## 2.2 Microscopische variabelen

Microscopische modellen hebben betrekking op individuele voertuigen. Daaraan zijn een aantal variabelen verbonden (zie ook figuur 2.3).

Een voertuig wordt aangeduid met  $\alpha$  en heeft als voorligger een voertuig welke wordt aangeduid met  $\alpha - 1$ . Het voertuig heeft lengte  $l$ . De headway  $h$  is de afstand in plaats of tijd tussen de achterbumper van voertuig  $\alpha$  en  $\alpha - 1$ . Wanneer we spreken over de headway  $h$  zal erbij gezegd worden of het gaat om de headway in plaats of in tijd. Vaak wordt de achterbumper als referentiepunt gebruikt, wat correspondeert met de blauwe lijn, welke we de *trajectorie* zullen noemen. Merk op dat als we uitgaan van een éénbaansweg, waar dus niet ingehaald kan worden, tussen de trajectories tenminste een afstand  $l$  hoort te zitten. Is deze afstand minder dan  $l$ , dan zou dat betekenen dat een voertuig zijn voorligger op de één of andere manier toch ingehaald zou moeten hebben en dat kan niet ingeval van een éénbaansweg. Bedraagt de afstand precies  $l$ , dan zou dat betekenen dat de twee voertuigen tegen elkaar (aan)rijden. De gap, aangeduid met  $g$ , is het verschil in tijd tussen voertuigen, gemeten bij een vaste plaats  $x$ . De afstand, aangeduid met  $d$ , is het verschil in plaats tussen twee voertuigen gemeten bij een vaste tijd  $t$ .

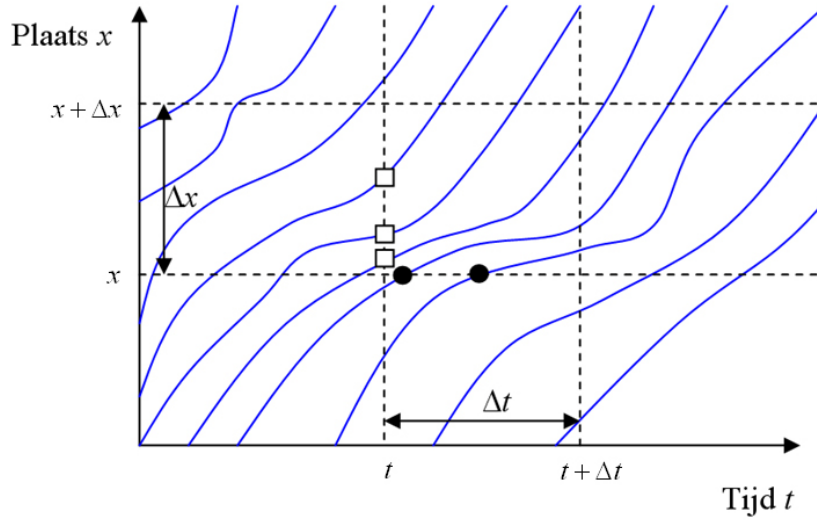
## 2.3 Macroscopische variabelen

Om het verkeer in kaart te brengen, worden er metingen verricht. Dit kan met behulp van zogenaamde inductielussen in het wegdek. Deze lussen detecteren of er een auto overheen rijdt.



**Figuur 2.3.** Microscopische variabelen.

Aan de hand daarvan kunnen een aantal variabelen afgeleid worden, te weten: de *intensiteit*, de *snelheid* en de *dichtheid*.



**Figuur 2.4.** Macroscopische variabelen.

Een detectielus telt in een tijdsinterval  $\Delta t$  het aantal gepasseerde voertuigen  $N$ . Echter, er kan meer worden gemeten dan alleen het aantal voertuigen dat zo een lus passeert. Ook kan bijgehouden worden wanneer een voertuig  $\alpha$  de detectielus bereikt ( $t_\alpha^0$ ) en wanneer het voertuig deze lus weer verlaat ( $t_\alpha^1$ ).

### 2.3.1 Intensiteit

De intensiteit  $Q(x, t)$  is het aantal voertuigen per tijdseenheid op een bepaalde plaats en tijd en is gelijk aan

$$Q(x, t) = \frac{N}{\Delta t}.$$

In figuur 2.4 komt dit overeen met het aantal zwarte rondjes gedeeld door de lengte van het interval  $\Delta t$ . De intensiteit hangt dan af van de plaats  $x$  waar gemeten wordt en tevens van de tijd  $t$ . Vandaar dat de variabelen  $x$  en  $t$  een rol spelen.

### 2.3.2 Snelheid

De snelheid  $V(x, t)$  is de afgelegde weg per tijdseenheid. Ook dit is weer afhankelijk van plaats  $x$  en tijd  $t$ . Dit is eigenlijk een gemiddelde van alle voertuigen die in het tijdsinterval  $\Delta t$  de detectielus gepasseerd zijn.

Laten we  $\alpha_0$  het laatste voertuig zijn waarna de meting begint gedurende een tijdsinterval  $\Delta t$ , waarin dan  $N$  voertuigen passeren, dan geldt:

$$V(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=\alpha_0+1}^{\alpha_0+N} v_\alpha,$$

waarbij  $v_\alpha$  de snelheid is van voertuig  $\alpha$ .

### 2.3.3 Dichtheid

De dichtheid  $\rho(x, t)$  is het aantal voertuigen per eenheid weglengte en kan berekend worden aan de hand van het verband tussen intensiteit, snelheid en dichtheid (zie 2.4. Wetten):

$$\rho(x, t) = \frac{Q(x, t)}{V(x, t)}.$$

In figuur 2.4 komt de dichtheid overeen met het aantal voertuigen in een gegeven plaatsinterval ter grootte  $\Delta x$  op tijd  $t$  gedeeld door de lengte van het plaatsinterval. Dus de dichtheid is het aantal vierkantjes in figuur 2.4 gedeeld door  $\Delta x$ . De dichtheid hangt af van de plaats  $x$  en van  $t$ .

### 2.3.4 Twee- en meerbaanswegen

Veel wegen bestaan uit meer dan één rijbaan. Hiervoor hebben we reeds de intensiteit, snelheid en de dichtheid gedefinieerd voor éénbaanswegen. Voor twee- en meerbaanswegen kunnen we dat ook doen.

De intensiteit van meerbaanswegen is intuïtief duidelijk, aangezien dat het aantal voertuigen per tijdseenheid is. Als we nu de intensiteit van rijbaan  $i$  aanduiden met  $Q_i(x, t)$  dan wordt de intensiteit voor een meerbaansweg gegeven door

$$Q(x, t) = \sum_{i=1}^I Q_i(x, t),$$

met  $I$  het aantal rijbanen. Ook de dichtheid is in één oogopslag duidelijk. Met  $\rho_i(x, t)$  de dichtheid van rijbaan  $i$ , wordt de dichtheid voor meerbaanswegen gegeven door

$$\rho(x, t) = \sum_{i=1}^I \rho_i(x, t).$$

De snelheid was ingeval van een éénbaansweg al een gemiddelde van de snelheid van ieder voertuig apart. Het toepassen van de fundamentele vergelijking geeft, met  $V_i(x, t)$  de (gemiddelde) snelheid op rijbaan  $i$ :

$$V(x, t) = \frac{Q(x, t)}{\rho(x, t)} = \frac{Q(x, t)}{\sum_{i=1}^I \frac{Q_i(x, t)}{V_i(x, t)}} = \left[ \sum_{i=1}^I \frac{Q_i(x, t)}{V_i(x, t) Q(x, t)} \right]^{-1}.$$

**Een voorbeeld** We beschouwen een tweebaansweg. Voor rijbaan 1 is de intensiteit 1000 voertuigen/uur en de gemiddelde snelheid 100 km/uur. Voor rijbaan 2 is dit respectievelijk 1500 voertuigen/uur en 80 km/uur. De intensiteit voor de tweebaansweg is nu gelijk aan

$$Q(x, t) = 1000 + 1500 = 2500 \text{ voertuigen/uur.}$$

De gemiddelde snelheid voor de tweebaansweg is nu gelijk aan:

$$V(x, t) = \left[ \frac{1000}{100 \cdot 2500} + \frac{1500}{80 \cdot 2500} \right]^{-1} = 86.96 \text{ km/uur.}$$

Merk op dat de gemiddelde snelheid van de tweebaansweg, en van meerbaanswegen in het algemeen, niet het gewogen rekenkundig gemiddelde is van de diverse gemiddelde snelheden per rijbaan met als wegingsfactor de relatieve intensiteit.

Immers, het gewogen rekenkundig gemiddelde is in het geval van het voorbeeld gelijk aan

$$\frac{1000}{2500} \cdot 100 + \frac{1500}{2500} \cdot 80 = 88 \text{ km/uur.}$$

De gemiddelde snelheid van meerbaanswegen is daarentegen het harmonisch gemiddelde van de diverse gemiddelde snelheden per rijbaan met als wegingsfactor de relatieve intensiteit.

## 2.4 Wetten

Als men een traject beschouwt, dan moet het aantal voertuigen dat het traject binnenkomt gelijk zijn aan het aantal voertuigen dat het traject verlaat vermeerderd met het aantal voertuigen dat nog in het traject zit. Het komt er dus op neer dat er geen voertuigen verloren gaan, dus ofwel het voertuig is het traject al weer gepasseerd ofwel het voertuig zit er nog steeds in. Dit staat bekend als *de wet van behoud van voertuigen*.

Een andere wet is die van het *verband tussen intensiteit, snelheid en dichtheid*. Het verband luidt dan als volgt.

$$Q(x, t) = \rho(x, t)V(x, t), \quad [\text{fundamentele vergelijking}].$$

**Een voorbeeld** We meten het aantal voertuigen per seconde op een bepaald gedeelte van de weg en op een bepaald tijdstip. Stel dat er 5 voertuigen in die seconde de detectielus gepasseerd zijn. Neem ook aan dat er 0.15 voertuigen per meter rijden. De snelheid laat zich dan gemakkelijk berekenen en is

$$V(x, t) = \frac{Q(x, t)}{\rho(x, t)} = \frac{5}{0.15} = 33\frac{1}{3} \text{ m/s} = 120 \text{ km/uur.}$$

## 2.5 Homogeniteit en Stationariteit

Op een weg bevinden zich vaak verschillende typen voertuigen. Zo bevinden zich bijvoorbeeld zowel vrachtwagens als personenauto's op een bepaalde weg. In de werkelijkheid is het verkeer dan ook een mengsel van verschillende typen voertuigen, die ieder van elkaar verschillen. Wanneer we echter aannemen dat alle voertuigen identiek zijn en we dus maar één type voertuig beschouwen, spreken we over *homogeen* verkeer.

We noemen de verkeerstoestand *stationair* wanneer op verschillende tijdstippen en locaties de verkeerstoestand hetzelfde is. Dat wil zeggen dat ieder voertuig dezelfde snelheid heeft (waaruit direct volgt dat de trajectories rechte lijnen zijn) en op onderling gelijke afstand van elkaar rijden. Ingeval van stationariteit kunnen we ook de afhankelijkheid van  $x$  en  $t$  bij  $Q(x, t)$ ,  $\rho(x, t)$  en  $V(x, t)$  weglaten.

## 2.6 Diagrammen

Diagrammen zijn heel nuttig om informatie visueel weer te geven. Zeker wanneer we aankomen bij de simulatie van de diverse modellen. In de verkeerskunde komen enkele diagrammen aan bod. We zullen als eerste kijken naar het *fundamenteel diagram*, welke te maken heeft met de dichtheid, snelheid en intensiteit.

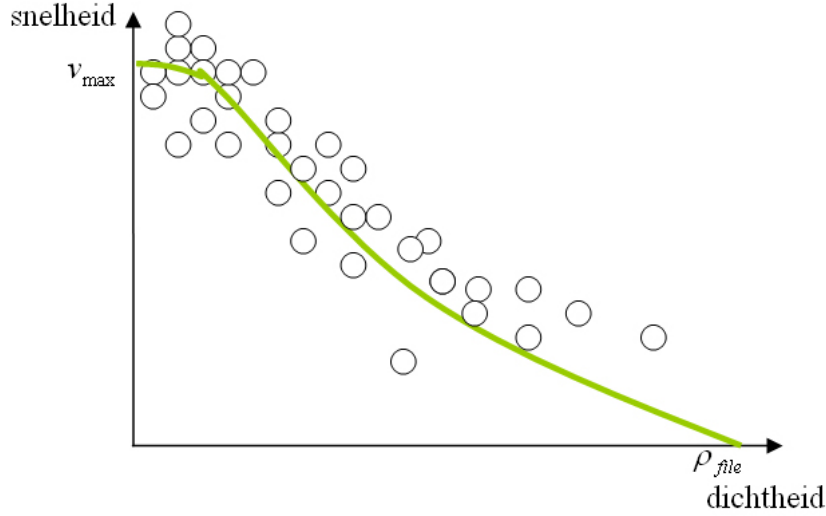
### 2.6.1 Fundamenteel diagram

In het fundamenteel diagram wordt de snelheid uitgezet tegen de dichtheid, de snelheid uitgezet tegen de intensiteit of de intensiteit uitgezet tegen de dichtheid. Merk op dat als we een punt uit het diagram weten, we ook meteen de derde variabele weten. Dit volgt immers uit de fundamentele vergelijking.

Wanneer de snelheid wordt uitgezet tegen de dichtheid, dan blijkt uit het fundamenteel diagram dat de snelheid redelijk snel afneemt als functie van de dichtheid. Figuur 2.5 is het typische diagram wat men krijgt als men de snelheid uitzet tegen de dichtheid. Hierin stellen de rondjes de empirische waarden (waarnemingen) voor en is de groene lijn het verband dat men krijgt ingeval van stationariteit, de evenwichtstoestand. De waarnemingen schommelen rond de groene lijn, aangezien het verkeer in de werkelijkheid helemaal niet stationair is. De maximale snelheid wordt aangeduid met  $v_{max}$  en de dichtheid waarbij de snelheid gelijk is aan 0 wordt aangeduid met  $\rho_{file}$ .

Wanneer we de intensiteit uitzetten tegen de dichtheid, dan verkrijgen we een typisch verloop zoals is weergegeven in figuur 2.6. Hierin correspondeert de paarse lijn met de evenwichtstoestand.

Nemen we in het voorgaande de snelheid constant, dan is duidelijk dat de intensiteit proportioneel is met de dichtheid. Wanneer de intensiteit onder de maximale intensiteit  $Q_{max}$  blijft, dan



**Figuur 2.5.** Fundamenteel diagram van de snelheid en de dichtheid.

kunnen de voertuigen gewoon doorrijden met de constante snelheid. Deze fase wordt *free flow* genoemd, omdat de voertuigen ongehinderd met hun maximale snelheid kunnen rijden. Echter, wanneer  $Q_{max}$  bereikt wordt en de dichtheid nog steeds toeneemt, zullen de intensiteit en de snelheid (moeten) afnemen en zal er sprake zijn van filevorming. Dit gebeurt dus vanaf  $\rho_c$  in figuur 2.6. De fase waar de voertuigen zich dan in bevinden, wordt *congestie* genoemd en de overgang van de ene fase naar een andere fase wordt, zoals verwacht, aangeduid met de term *faseovergang*. Er vindt dus een faseovergang plaats van free flow naar congestie op het moment dat de intensiteit zijn maximum bereikt. De dichtheid in de congestie fase waarbij de intensiteit gelijk aan 0 is, is  $\rho_{file}$ .

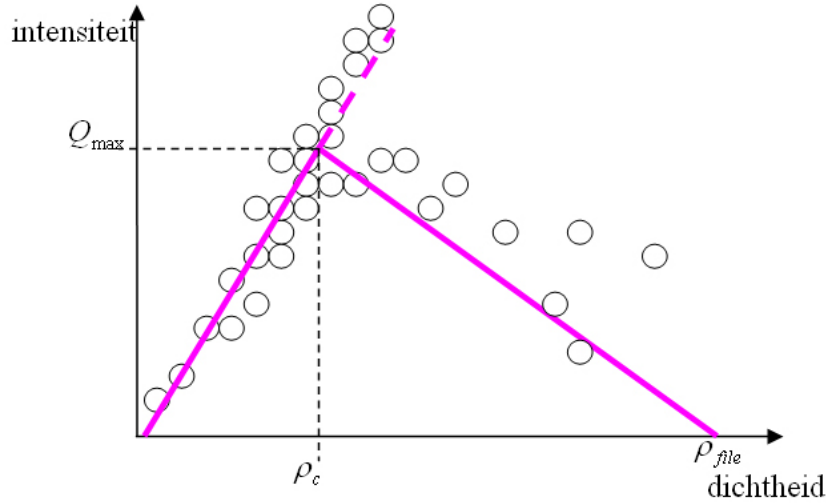
De grafiek waarbij de intensiteit is uitgezet tegen de dichtheid lijkt iets weg te hebben van een omgekeerde lambda. Dit houdt in dat bij eenzelfde dichtheid toch twee verschillende waarden van de intensiteit kunnen horen, de één corresponderend met de free flow fase en de andere corresponderend met de congestie fase. Hierover later meer.

Ook is er empirische data beschikbaar om de snelheid uit te zetten tegen de intensiteit in een fundamenteel diagram. Dit diagram ziet eruit als in figuur 2.7 met als groene lijn de relatie in de evenwichtstoestand.

Als we een relatie kunnen afleiden tussen twee variabelen uit het fundamentele diagram, dan valt de derde variabele automatisch te berekenen. Greenshield kwam in 1934 al met een formulering dat de relatie tussen de snelheid en de dichtheid lineair was [10]. Laten we nu zelf zo een eenvoudige relatie afleiden tussen de snelheid en de dichtheid, zoals die weergegeven staat in figuur 2.5. Alhoewel dit verband niet lineair lijkt, zullen we toch naar een lineair verband kijken, vanwege de eenvoud. We zoeken dus een functie  $V(\rho) \in [0, v_{max}]$ ,  $\rho \in [0, \rho_{file}]$ . Een functie die hieraan voldoet en tevens lineair is, is de volgende.

$$V(\rho) = v_{max} - \frac{v_{max}}{\rho_{file}}\rho.$$

Nu valt aan de hand van de fundamentele vergelijking het verband af te leiden tussen bijvoorbeeld de snelheid en de intensiteit of het verband tussen de intensiteit en de dichtheid. Uit de



**Figuur 2.6.** Fundamenteel diagram van de intensiteit en de dichtheid.

fundamentele vergelijking volgt

$$Q(\rho) = \rho V(\rho) = v_{max} \rho - \frac{v_{max}}{\rho_{file}} \rho^2, \quad (\text{intensiteit als functie van de dichtheid}).$$

Door de inverse te nemen van  $V(\rho)$  kunnen we de dichtheid als een functie van de snelheid beschrijven. De inverse laat zich gemakkelijk berekenen en is gelijk aan

$$\rho(V) = \rho_{file} - \frac{\rho_{file}}{v_{max}} V.$$

Wederom door gebruik te maken van de fundamentele vergelijking kunnen we de intensiteit als functie van de snelheid beschrijven:

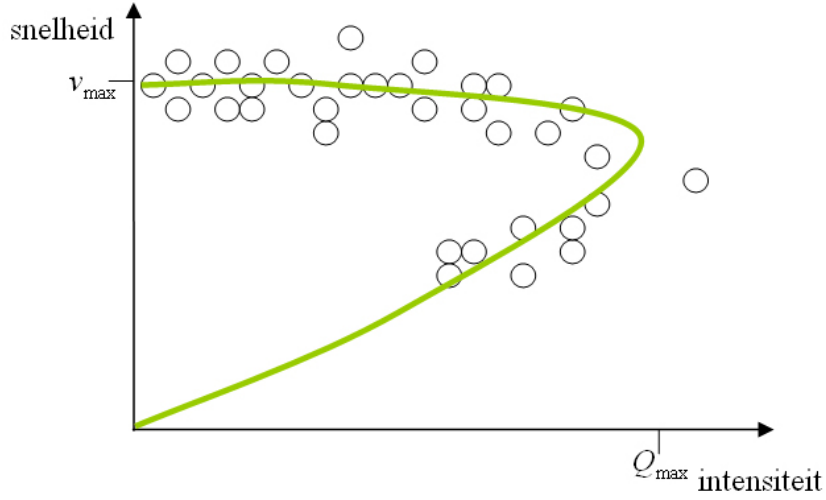
$$Q(V) = \rho(V)V = \rho_{file} V - \frac{\rho_{file}}{v_{max}} V^2, \quad (\text{intensiteit als functie van de snelheid}).$$

Nemen we de inverse van  $Q(V)$  dan hebben we de snelheid als functie van de intensiteit.

Om het voorgaande visueel te maken, kunnen we de diagrammen tekenen. In figuur 2.8 is achtereenvolgens het diagram afgebeeld van de snelheid als functie van de dichtheid (figuur 2.8(a)), de intensiteit als functie van de dichtheid (figuur 2.8(b)) en het verband tussen de snelheid en de intensiteit (figuur 2.8(c)). Hierbij is er vanuit gegaan dat  $\rho_{file} = 200$  voertuigen per kilometer en  $v_{max} = 100$  kilometer per uur.

Het blijkt dat de voorgaande diagrammen niet echt goed overeenkomen met de empirische data en de lijn waarbij sprake is van stationariteit, alhoewel de vorm enigszins overeenkomt. Dit komt met name doordat we een eenvoudige relatie hebben gebruikt.

Een ander model dat vaak gebruikt wordt is het driehoeksmodel, waarin de relatie tussen de intensiteit en de dichtheid wordt voorgesteld als een driehoek. Als we naar het fundamentele diagram kijken waarin de intensiteit is uitgezet tegen de dichtheid, dan blijkt dat deze inderdaad iets wegheeft van een driehoek. In het model waarbij we aangenomen hebben dat de relatie tussen snelheid en dichtheid lineair was, zagen we dat de intensiteit als functie van de dichtheid juist een paraboel opleverde (zie figuur 2.8(b)).



**Figuur 2.7.** Fundamenteel diagram van de snelheid en de intensiteit.

We gaan nu eveneens zelf een model opstellen voor de relatie tussen de intensiteit en de dichtheid die een driehoeksvorm heeft. Allereerst is het van belang te weten waar de top van de driehoek moet komen. Dit is bij de faseovergang van free flow naar congestie, dus komt de top van de driehoek op  $Q_{max}$  en de bijbehorende dichtheid zullen we aanduiden met  $\rho_c$ . Een model dat hieraan voldoet is het volgende.

$$Q(\rho) = \begin{cases} \frac{Q_{max}}{\rho_c} \rho, & \text{als } \rho \leq \rho_c, \\ Q_{max} - \frac{Q_{max}}{\rho_{file} - \rho_c} (\rho - \rho_c), & \text{als } \rho > \rho_c. \end{cases}$$

Uit de fundamentele vergelijking volgt nu onder andere dat

$$V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho} = \begin{cases} \frac{Q_{max}}{\rho_c}, & \text{als } \rho \leq \rho_c, \\ \frac{Q_{max}}{\rho} - \frac{Q_{max}}{\rho(\rho_{file} - \rho_c)} (\rho - \rho_c) = Q_{max} \frac{\rho_{file} - \rho}{\rho(\rho_{file} - \rho_c)}, & \text{als } \rho > \rho_c, \end{cases}$$

en

$$V^{-1}(Q) = V^{-1}(\rho)V.$$

De inverse van  $V(\rho)$  bestaat niet ingeval  $\rho \leq \rho_c$ . Als we de inverse nemen van de uitdrukking ingeval  $\rho > \rho_c$  vinden we

$$V^{-1}(\rho) = \frac{Q_{max}\rho_{file}}{V(\rho_{file} - \rho_c) + Q_{max}}, \text{ als } V \leq v_{max},$$

maar de grafiek van de inverse van  $V(\rho)$  is niet geheel alleen beschreven door het voorgaande. Ook behoort daarbij een verticale lijn die voldoet aan:

$$V = v_{max} \quad \text{voor} \quad \rho \in [0, \rho_c].$$

Ook bestaat dan  $V^{-1}(Q)$  niet overal; de grafiek van  $V^{-1}(Q)$  heeft een verticale lijn bij  $V = v_{max}$  voor  $Q \in [0, Q_{max}]$ .

Wanneer we achtereenvolgens de diagrammen tekenen die horen bij de snelheid als functie van de dichtheid, de intensiteit als functie van de dichtheid en tot slot de relatie tussen de snelheid en de intensiteit, krijgen we de figuren 2.8(d), 2.8(e) en 2.8(f). Hierbij is er vanuit gegaan dat  $\rho_{file} = 200$  voertuigen per kilometer,  $\rho_c = 50$  voertuigen per kilometer en  $Q_{max} = 5000$  voertuigen per uur.

### 2.6.2 Plaats-tijd-diagram

We hebben al eerder het plaats-tijd-diagram gezien, bijvoorbeeld in figuur 2.4. In een plaats-tijd-diagram wordt de plaats  $x$  van een voertuig uitgezet tegen de tijd  $t$ .

In figuur 2.4 zijn meerdere trajectories te zien, wat correspondeert met meerdere voertuigen. Aan de hand van zo een diagram kunnen we dus aflezen hoe een voertuig zich heeft verplaatst gedurende een bepaalde tijd. Zo kunnen we ook zien of er sprake is van filevorming. De voertuigen rijden dan langzaam en doorgaans dichter op elkaar, zoals reeds weergegeven is in figuur 2.2 in het omcirkelde gebied.

De snelheid is, zoals welbekend uit de natuurkunde, te bepalen door de afgeleide van de plaats naar de tijd te nemen:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t).$$

Zo zien we dus het volgende: hoe platter (horizontaler) de lijnen in het plaats-tijd-diagram lopen, des te langzamer de voertuigen zich voortbewegen.

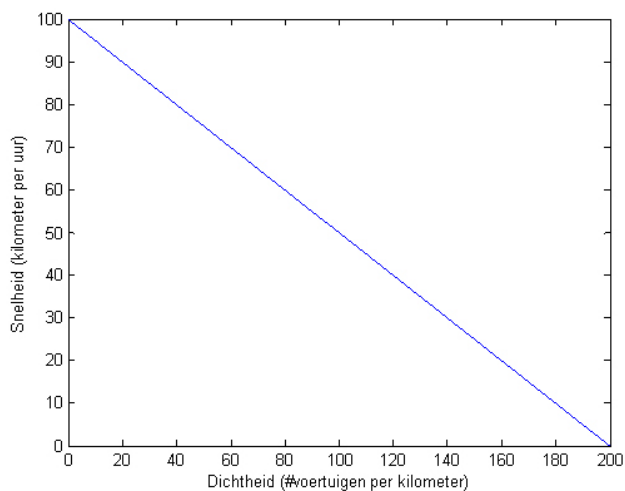
Het plaats-tijd-diagram zal bij de simulatie een belangrijke plaats innemen, omdat aan de hand daarvan visueel het verloop van filevorming kan worden weergegeven.

## 2.7 Stabiliteit

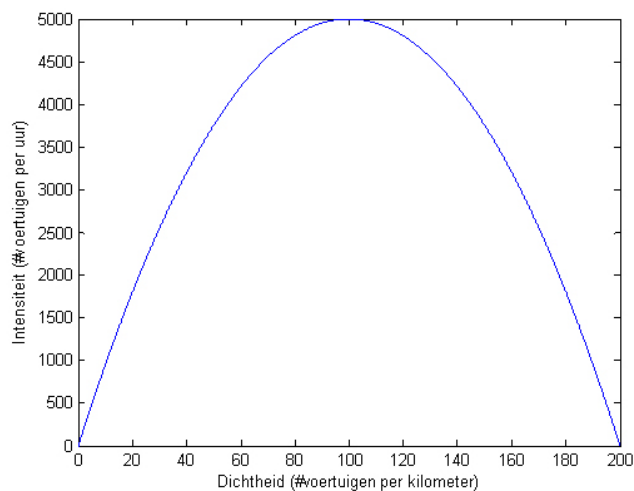
*Stabiliteit* heeft te maken met het al dan niet verminderen van een verstoring in een systeem. Een systeem wordt stabiel genoemd als een verstoring in de evenwichtstoestand leidt tot een respons waarbij de verstoring afneemt in de tijd, anders wordt een systeem instabiel genoemd.

Als we ons een voertuig voorstellen dat vrij kan rijden met daarachter een aantal andere voertuigen die niet vrij kunnen rijden, dat wil zeggen dat het rijgedrag van deze voertuigen afhangt van de voertuigen voor hen, dan duiden we zo een groep voertuigen aan met de term *peloton*. De afstand tussen twee opeenvolgende pelotons zullen we aanduiden met *peloton gap*.

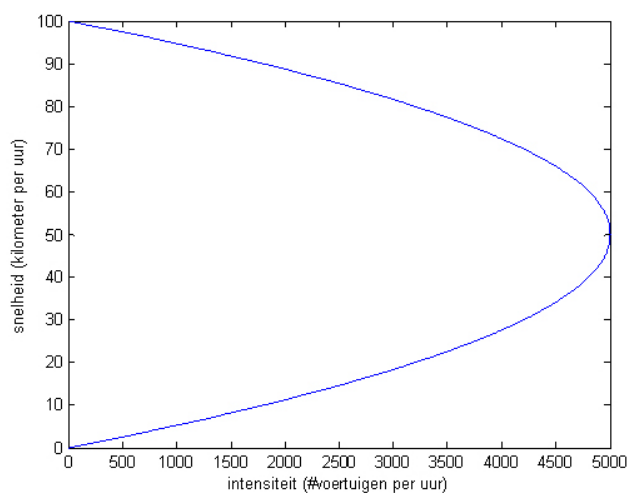
De vraag kan nu gesteld worden of een verstoring in de evenwichtstoestand van het verkeer ertoe leidt dat er sprake is van filevorming. Dit blijkt af te hangen van de grootte van het peloton, de grootte van de peloton gap en de zwaarte van de verstoring. Ook al is een peloton instabiel, dan nog kan het mogelijk zijn dat filevorming uitblijft. Hierin speelt de grootte van de peloton gap een belangrijke rol. Stel dat we aannemen dat een peloton instabiel is, en dus een verstoring (bijvoorbeeld, het voorste voertuig trapt even op zijn rem) leidt tot filevorming. Stel nu ook dat het voorste voertuig remt en het laatste voertuig van het peloton deze verstoring heviger ondervindt. Als de peloton gap maar groot genoeg is, hoeft deze verstoring niet over te slaan op het volgende peloton, waardoor daar de verstoring van het voorgaande peloton geen invloed heeft. Niet noodzakelijk leidt dus het instabiel zijn van een peloton, tot het instabiel zijn van het verkeer.



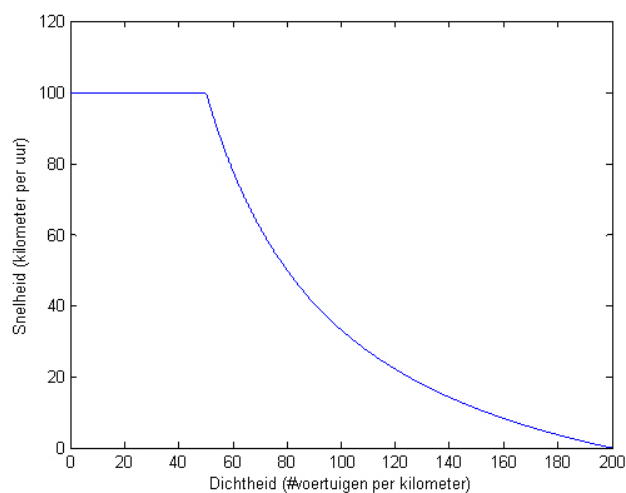
(a) Snelheid als functie van de dichtheid.



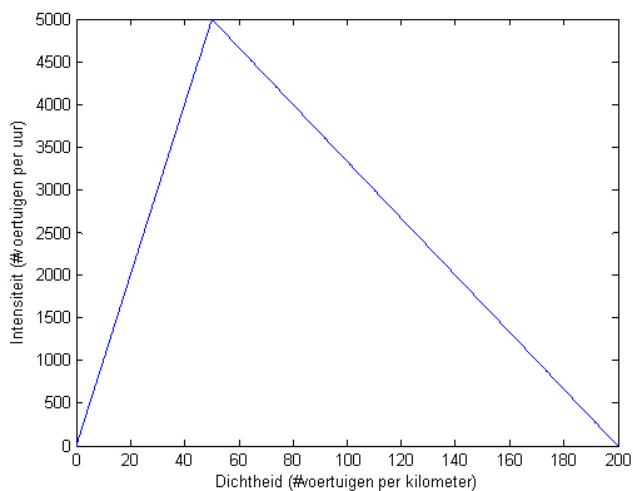
(b) Intensiteit als functie van de dichtheid.



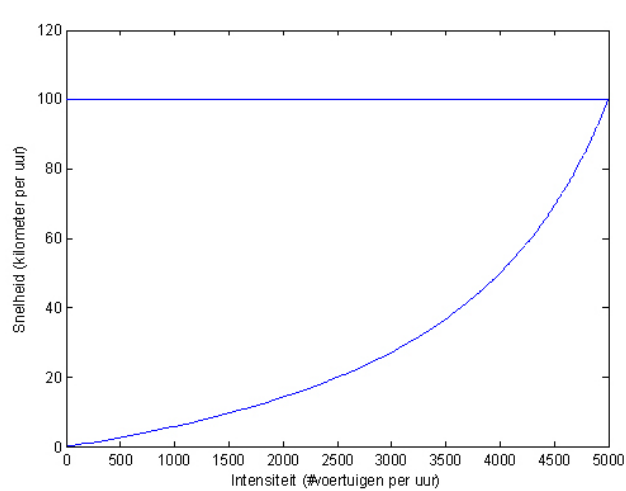
(c) Verband tussen de snelheid en de intensiteit.



(d) Snelheid als functie van de dichtheid.



(e) Intensiteit als functie van de dichtheid.



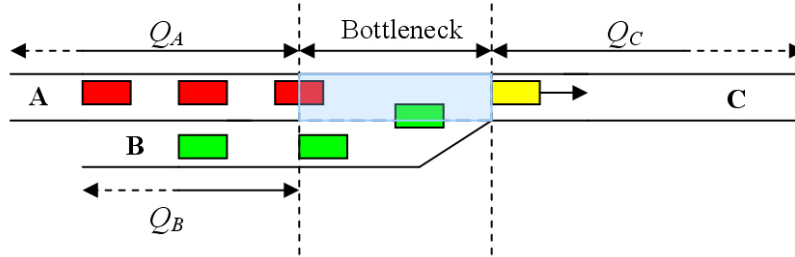
(f) Verband tussen de snelheid en de intensiteit.

**Figuur 2.8.** Fundamentele diagrammen: (a) t/m (c) lineair, (d) t/m (f) driehoek.

In figuur 2.6 hebben we gezien dat de grafiek van de intensiteit tegen de dichtheid eruit ziet als een omgekeerde lambda. Dit heeft ermee te maken dat vlak voordat de kritieke dichtheid is bereikt, de maximale capaciteit hoger kan liggen dan de capaciteit die geldt aan de kop van de file wanneer er eenmaal sprake is van file. Zo een verhoogde capaciteit houdt niet lang stand. Een verklaring voor deze verhoogde capaciteit ligt weer bij de stabiliteit. Er moet immers een verstoring zijn die groot genoeg is om het verkeer daadwerkelijk tot stilstand te brengen. Juist in die tijd kan de capaciteit hoger zijn, maar doordat het verkeer instabiel is bij zulke hoge dichtheden zal deze capaciteit maar van korte duur zijn.

Aan het begin van dit hoofdstuk is gezegd dat het opmerkelijk is dat files zich naar achteren verplaatsen. Het feit of de kop van file zich verplaatst, hangt af van de stabiliteit. We zeggen hierbij alleen dat de kop van de file zich naar achteren verplaatst als het afremmende verkeer instabiel is.

**Een voorbeeld** We kijken naar een hoofdweg waarbij andere voertuigen in moeten voegen. Dit is een situatie waar sprake is van een eventuele bottleneck, zoals reeds al aan het begin van dit hoofdstuk besproken is. Laten we nu de hoofdweg voor de bottleneck aanduiden met  $A$ , de invoegstrook met  $B$  en de hoofdweg na de bottleneck met  $C$  en laat verder dat de verkeersstroom, ofwel intensiteit behorende bij de diverse delen van de weg aangeduid worden met  $Q_A$ ,  $Q_B$  en  $Q_C$ , waarbij bovendien geldt dat  $Q_A + Q_B > Q_{max}$ , zodat er inderdaad sprake is van een bottleneck. Stel bovendien dat het invoegende verkeer voorrang heeft, zodat het verkeer op baan  $A$  moet afremmen. Zie figuur 2.9 voor een visuele weergave.



**Figuur 2.9.** Weergave van de situatie bij het voorbeeld.

De intensiteit in het lichtblauw gekleurde gebied kan maximaal  $Q_{max}$  zijn, zodat de intensiteit van het verkeer op baan  $A$  gelijk is aan  $Q_{A'} = Q_{max} - Q_B$ . Veronderstel dat het afremmende verkeer stabiel is, dan is de intensiteit in het lichtblauw gekleurde gebied gelijk aan  $Q_{A'} + Q_B = Q_{max}$ . Dit betekent dus dat  $Q_C = Q_{max}$  en dus verlaat het verkeer de kop van de file met dezelfde rate als er voertuigen achteraan sluiten. De kop van de file verplaatst zich dus niet.

Wanneer het afremmende verkeer instabiel is, dan geldt dat de intensiteit van het verkeer op baan  $A$  gelijk is aan  $Q_{A''} < Q_{A'}$ . Nu is de intensiteit in het lichtblauw gekleurde gebied gelijk aan  $Q_{A''} + Q_B < Q_{max}$ . Aangezien  $Q_C$  nu de waarde van  $Q_{max}$  aan kan nemen, zullen de voertuigen de file met een hogere rate verlaten dan de voertuigen in de file aankomen. De kop van de file verplaatst zich dus nu naar achteren.



# Hoofdstuk 3

## Modellen

In de loop der jaren zijn er een aantal modellen ontwikkeld die het verkeer beschrijven. In de jaren vijftig was men al bezig met microscopische en macroscopische modellen. In de jaren zestig was het onderzoek gevestigd op zogenaamde *follow the leader* modellen. Hierbij wordt ieder voertuig apart bekeken en horen *follow the leader* modellen dus tot de categorie van microscopische modellen. Vanaf de jaren zeventig tot de jaren tachtig werden macroscopische modellen ontwikkeld, vaak op basis van vloeistofdynamica. Van latere oorsprong zijn *cellulaire automaten* die pas in de jaren negentig naar voren zijn gekomen. Dit was weer een stap naar microscopische modellen.

### 3.1 Microscopische modellen

In hoofdstuk 2 was te lezen dat microscopische modellen betrekking hebben op individuele voertuigen. Deze modellen beschrijven het plaats-tijd gedrag van voertuigen welke invloed ondervinden van andere voertuigen in zijn buurt.

#### 3.1.1 Follow the leader

Follow the leader modellen beschrijven het gedrag van voertuigen die andere voertuigen volgen. Het gedrag van voertuig  $\alpha$  hangt af van voertuig  $\alpha - 1$  (zijn directe voorganger), maar hangt wellicht ook nog af van  $\alpha - n$  met  $n \geq 2$ . De categorie van *follow the leader* modellen kan weer onderverdeeld worden in verschillende typen.

#### Safe distance modellen

Deze modellen zijn uitermate simpel. Ze vertellen eigenlijk niets over het gedrag van de voertuigen, alleen maar wat de veilige afstand is tussen twee voertuigen. Er zijn diverse modellen hiervoor ontwikkeld.

Leutzbach kwam met een model waarin rekening wordt gehouden met de reactietijden van de bestuurders. Volgens hem bestaat de reactietijd uit drie componenten: (1) de tijd tot waarnemen, (2) de tijd om een beslissing te nemen en (3) de tijd dat het kost om daadwerkelijk op de rem te trappen [9].

De *total safety distance model* geeft de veilige volgafstand van voertuig  $\alpha$  tot zijn voorganger die nodig is als voertuig  $\alpha - 1$  ineens stilstaat. Voertuig  $\alpha - 1$  heeft in deze situatie een oneindig grote remvertraging, waardoor dit voertuig direct stil kan gaan staan. Uit de natuurkunde is bekend dat de plaats van voertuig  $\alpha$  een functie is van de tijd  $t$ , en gelijk is aan

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Hierin is  $x_0$  de beginplaats,  $v_0$  de beginsnelheid en  $a$  de versnelling. Zoals reeds in hoofdstuk 2 te lezen is, geldt dat de snelheid op tijdstip  $t$ , de afgeleide van de plaatsfunctie naar de tijd is.

$$v(t) = v_0 + at.$$

Laat nu  $g$  de maximale vertraging van een voertuig zijn, dan volgt nu met  $a = -g$  (de versnelling is gelijk aan minus de vertraging) dat de tijd  $t$  waarop het voertuig stil staat, gelijk is aan

$$0 = v(t) = v_0 - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}.$$

Dit is de tijd die nodig is om het voertuig volledig tot stilstand te laten komen. De verplaatsing  $\Delta x$  gedurende  $t$  is nu

$$\Delta x = x(t) - x(0) = \left[ x_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{gv_0^2}{2g^2} \right] - [x_0] = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Met  $T$  duiden we de reactietijd aan van de bestuurder van het voertuig. De verplaatsing van een voertuig wanneer deze opmerkt dat zijn voorganger ineens stilstaat, bestaat uit twee componenten. De eerste is de afgelegde weg gedurende zijn reactietijd  $T$  en de tweede is de afgelegde weg gedurende zijn vertraging, waarvoor we hierboven een uitdrukking afgeleid hebben. Nu volgt dat de veilige headway  $h$  in plaats (herinner dat dit de afstand is tussen de achterbumpers van de twee opeenvolgende voertuigen met lengte  $l$ ) gelijk is aan

$$h(v) = l + Tv + \frac{v^2}{2g}.$$

**Een voorbeeld** Een voertuig met een lengte van 4 meter rijdt met een snelheid van 27.7 m/s ( $\approx 100$  km/uur). De reactietijd van de bestuurder bedraagt in totaal 0.25 seconden en de vertraging van het voertuig is gelijk aan 8 m/s<sup>2</sup>. De veilige headway is nu gelijk aan  $4 + 0.25 \cdot 27.7 + (27.7)^2 / (2 \cdot 8) = 58.88$  meter. Dit betekent dat de afstand tussen de voorbumper van het voertuig en een ineens stilstaand object minimaal 58.88 – 4 meter moet bedragen zodat er geen botsing plaatsvindt.

Nu is het echter in de werkelijkheid niet zo dat een directe voorganger een oneindige grote remvertraging heeft en zal derhalve niet binnen no-time stilstaan. Wanneer we aannemen dat twee opeenvolgende voertuigen eenzelfde remweg hebben, dan laat de veilige headway zich beperken tot een uitdrukking die niet meer afhangt van de afgelegde weg gedurende de vertraging. We zijn dan slechts geïnteresseerd in de afgelegde weg tijdens de reactietijd  $T$  van voertuig  $\alpha$ .

Zo een dergelijk model zal automatisch iets van de volgende vorm zijn:

$$h(v) = l + vT.$$

Jepsen kwam met een model waarin niet alleen  $l$  en  $v$  een rol spelen, maar ook  $d_{min}$  (een constante minimale afstand tussen twee voertuigen) en  $F$  (een risico factor verbonden aan de snelheid) [zie [9]]. Het bijbehorende model wordt dan gegeven door:

$$h(v) = (l + d_{min}) + v(T + vF).$$

### Stimulus-response car-following modellen

In de vorige paragraaf ging het alleen nog maar om de veilige afstand tussen twee opeenvolgende voertuigen. Bij *stimulus-response* modellen gaat het om responses (acties) die worden uitgevoerd naar aanleiding van een stimulus. De relatie tussen de stimulus en response wordt op de volgende manier vastgelegd:

$$\text{Response} = \text{gevoeligheid} \cdot \text{stimulus}.$$

Bij voertuigen ligt het voor de hand om als responses (acties) te denken aan versnelling of vertraging, beide met elementen uit  $\mathbb{R}_+$ . Echter, omdat vertraging het tegenovergestelde is van versnelling, zullen we slechts spreken over de actie versnelling met waarden uit heel  $\mathbb{R}$ , waarbij dan een negatieve waarde correspondeert met vertraging. Zo is een vertraging van  $8 \text{ m/s}^2$  gelijk aan een versnelling van  $-8 \text{ m/s}^2$  en omgekeerd.

Als stimulus kan de relatieve snelheid genomen worden van een voertuig ten opzichte van zijn voorganger. Een dergelijk stimulus-response car-following model wordt gegeven door:

$$\frac{dv_\alpha(t+T)}{dt} = a_\alpha(t+T) = \gamma [v_{\alpha-1}(t) - v_\alpha(t)],$$

met  $\gamma$  de gevoeligheid van de bestuurder. In dit model hangt de response (de versnelling van voertuig  $\alpha$ ) op tijdstip  $t+T$  af van de snelheden op tijdstip  $t$ . Er wordt hier dus vanuit gegaan dat de actie pas een reactietijd  $T$  later plaatsvindt.

De gevoeligheidsfactor  $\gamma$  heeft ermee te maken in welke mate er gereageerd wordt op de stimulus. Een gegeneraliseerde gevoeligheidsfactor waarin zowel de snelheid als de headway een rol spelen, is de volgende.

$$\gamma = c \frac{(v_\alpha(t+T))^{m_1}}{(x_{\alpha-1}(t) - x_\alpha(t))^{m_2}}.$$

Met  $m_2 \neq 0$  volgt hieruit dat de bestuurders meer gevoelig zijn voor de stimulus naarmate de headway kleiner is. Dit is iets wat met de werkelijkheid overeenkomt; als twee opeenvolgende voertuigen erg dicht op elkaar rijden, dan zal het gedrag van het achterste voertuig erg afhangen van het voertuig voor hem. Wanneer de twee voertuigen echter niet dicht op elkaar rijden, dan zal het gedrag van de voorganger nauwelijks invloed hebben op de achterligger; om een botsing te voorkomen hoeft deze zich immers niet direct aan te passen aan zijn voorganger.

Bij erg lage dichtheden van het verkeer is het bovenstaande model niet echt realistisch. Wanneer er geen “leading” voertuig is [ $x_{\alpha-1}(t) - x_\alpha(t) \rightarrow \infty$ ] zal een voertuig niet versnellen ingeval  $m_2 \neq 0$  en is de versnelling ongedefinieerd ingeval  $m_2 = 0$ . Het is ligt echter voor de hand te veronderstellen dat in zo een situatie het voertuig zal versnellen tot zijn gewenste snelheid.

### Intelligent Driver Model

Het Intelligent Driver Model (IDM) is ontwikkeld door Treiber en Helbing waarin de versnelling een continue functie is van de eigen snelheid, de afstand  $d_\alpha$  en de relatieve snelheid ten opzichte van de voorganger. Het model ziet er als volgt uit.

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = a^{(\alpha)} \left[ 1 - \left( \frac{v_\alpha}{v_0^{(\alpha)}} \right)^\delta - \left( \frac{d^*(v_\alpha, \Delta v_\alpha)}{d_\alpha} \right)^2 \right].$$

Hierin is  $\delta$  de versnellingsexponent om realistisch gedrag te modelleren en is  $d^*$  de gewenste minimale afstand, welke afhankelijk is van het snelheidsverschil en tot uitdrukking komt in

$$d^*(v, \Delta v) = d_0^{(\alpha)} + T^\alpha v + \frac{v \Delta v}{2\sqrt{a^{(\alpha)} b^{(\alpha)}}}.$$

Hierin is  $\Delta v \geq 0$  als en alleen als  $v_\alpha - v_{\alpha-1} \geq 0$ , dus wanneer het achterliggende voertuig een grotere snelheid heeft dan zijn voorganger. Voordat we dit model nader in detail zullen bekijken, geven we eerst aan welke parameters een rol spelen in dit model.

|       |                                       |
|-------|---------------------------------------|
| $v_0$ | gewenste snelheid op een lege weg     |
| $T$   | gewenste veilige headway in tijd      |
| $a$   | versnelling in normaal verkeer        |
| $b$   | vertraging in normaal verkeer         |
| $d_0$ | minimale afstand tussen de voorganger |

De term

$$a \left[ 1 - \left( \frac{v_\alpha}{v_0^{(\alpha)}} \right)^\delta \right]$$

heeft betrekking op de gewenste versnelling. Wanneer een voertuig vanuit stilstand ( $v = 0$ ) wil optrekken naar zijn gewenste snelheid  $v_0$  zien we dat de versnelling in eerste instantie gelijk is aan  $a$ , en dan vervolgens afneemt en nadert naar 0 wanneer de gewenste snelheid benaderd wordt.

De term

$$a \left[ \left( \frac{d^*(v_\alpha, \Delta v_\alpha)}{d_\alpha} \right)^2 \right]$$

heeft betrekking op de vertraging. We zien nu dat deze term groter wordt naarmate de afstand tussen het voertuig en zijn voorganger kleiner wordt, naarmate de eigen snelheid toeneemt en naarmate het snelheidsverschil groter wordt.

We kunnen dit model gebruiken wanneer we diverse typen voertuigen willen modelleren. In het algemeen zal de snelheid van vrachtwagens lager liggen dan de snelheid van auto's, wat we makkelijk in de parameterwaarden kunnen representeren. Wanneer we ons beperken tot homogeen verkeer, ontstaat het volgende model.

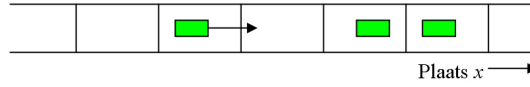
$$\frac{dv}{dt} = a \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left( \frac{d^*(v, \Delta v)}{d} \right)^2 \right], \text{ met } d^*(v, \Delta v) = d_0 + Tv + \frac{v \Delta v}{2\sqrt{ab}}.$$

### 3.1.2 Cellulaire automaten

Cellulaire automaten is eigenlijk een relatief eenvoudige manier om filevorming te modelleren. Het idee hiervan is dat de weg opgedeeld wordt in gebieden ofwel cellen die allemaal dezelfde lengte hebben. Iedere cel kan daarbij precies één voertuig bevatten. Voor we dit model nader in detail bekijken, verklaren we eerst de variabelen die gebruikt worden in dit model.

- $v_\alpha$  is de huidige snelheid van voertuig  $\alpha$ .
- $x_\alpha$  is de plaats van voertuig  $\alpha$ .
- $d_\alpha$  is het aantal cellen tussen voertuig  $\alpha$  en zijn voorganger.

Het idee van cellulaire automaten is visueel voor te stellen als in figuur 3.1.



**Figuur 3.1.** Visuele weergave CA.

Wanneer we een ééndimensionale cellulaire automaat bekijken (zoals die in figuur 3.1 afgebeeld staat), dan modelleren we eigenlijk een éénbaansweg. De toestand, i.e., de plaats van ieder voertuig, van het systeem wordt veranderd aan de hand van een aantal regels die te maken hebben met het versnellen van een voertuig, het houden van afstand en een toevalsaspect.

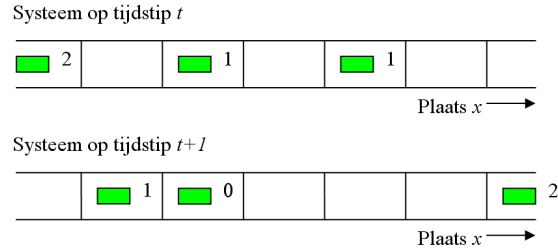
In iedere stap, wat dan een verandering van de toestand tot gevolg heeft, wordt in volgorde de volgende regels aangehouden.

1. Voertuig  $\alpha$  verhoogt zijn snelheid met 1 eenheid, mits  $v_\alpha < v_{max}$ .
2. Voertuig  $\alpha$  verlaagt zijn snelheid tot  $\min(v_\alpha, d_\alpha)$ .
3. Met kans  $p$  verlaagt voertuig  $\alpha$  zijn snelheid met 1 eenheid tot  $\max(v_\alpha - 1, 0)$ .
4. Voertuig  $\alpha$  gaat van  $x_\alpha$  naar  $x_\alpha + v_\alpha$ .

Regel 1 komt erop neer dat ieder voertuig zijn snelheid zal verhogen, zolang hij nog niet de maximale snelheid heeft bereikt. Regel 2 heeft te maken met het afstand houden. De snelheid van een voertuig kan nooit meer bedragen dan het aantal lege cellen tussen hem en zijn voorganger. Immers, zou dat wel het geval zijn, dan zal er sprake kunnen zijn van een botsing wanneer de voertuigen daadwerkelijk “verzet” worden in regel 4. Regel 3 zorgt ervoor dat het model stochastisch wordt en laat ieder voertuig met een kans  $p$  zijn snelheid verlagen. Wanneer de regels 1, 2 en 3 zijn verwerkt, is de nieuwe snelheid van ieder voertuig bekend en wordt ieder voertuig vooruit geplaatst, waarbij een snelheid van 1 overeenkomt met het verplaatsen van 1 cel. Het is duidelijk dat van tevoren de waarde van  $p$  en  $v_{max}$  gekozen moet worden.

**Een voorbeeld** We beschouwen het volgende systeem (zie figuur 3.2, systeem op tijdstip  $t$ ) met een maximum snelheid van 3. In de cellen met voertuigen wordt met een getal aangegeven wat de huidige snelheid van het betreffende voertuig is. We berekenen het systeem op tijdstip  $t + 1$ . Stap 1 vertelt ons om de snelheden te verhogen zolang de maximum snelheid nog niet bereikt is. Als we de “nieuwe” snelheden door middel van een vector representeren krijgen we  $v = (3, 2, 2)$ . Stap 2 resulteert in  $v = (1, 1, 2)$ . Stel nu dat na trekkingen uit de uniforme verdeling op  $[0, 1]$  voor ieder voertuig blijkt dat het tweede voertuig afremt. Stap 3 resulteert dan vervolgens in  $v = (1, 0, 2)$ . In figuur 3.2 is tevens het systeem getekend zoals die eruit ziet op tijdstip  $t + 1$  na het uitvoeren van stap 4.

Ook al oogt dit model simpel, het beschrijft toch goed de werkelijkheid. Echter, we kunnen het model nog realistischer maken door cellulaire automaten te gebruiken voor tweebaanswegen. Het



**Figuur 3.2.** Voorbeeld CA.

idee daarachter is dat voertuigen ook van rijbaan kunnen wisselen. Om dit te bewerkstelligen wordt gebruik gemaakt van een tweedimensionaal cellulaire automaat. Daarbij gelden een aantal extra regels die ingevoerd worden om het modelleren van baanverplaatsingen mogelijk te maken.

1. Er kan niet van baan verwisseld worden als een voertuig naast een ander voertuig rijdt.
2. Het heeft geen zin om van baan te verwisselen als de afstand tot de voorganger groter dan of gelijk aan  $b_1$  is.
3. Het heeft geen zin om van baan te verwisselen als de afstand tot de voorganger (het aantal cellen) in de andere baan kleiner is dan  $b_2$ .
4. Voor het invoegen is ruimte nodig, dus indien minimaal  $b_3$  cellen vrij zijn tot de achterligger in de andere baan, kan er van baan verwisseld worden.
5. Het daadwerkelijk verwisselen van baan is onderhevig aan een kans  $p_w$  met welke een voertuig daadwerkelijk besluit om van baan te verwisselen.

De bovenstaande stappen passen we toe op ieder voertuig om zodoende een deel van de verzameling voertuigen te krijgen die van baan verwisseld zullen worden. Nadat deze voertuigen van baan verwisseld zijn, worden de stappen toegepast die gelden bij het ééndimensionale cellulaire automaat. Naast de constanten  $p$  en  $v_{max}$  zal ingeval van tweebaanswegen ook een getalwaarde toegekend moeten worden aan  $b_1, b_2, b_3, p_w$ . Merk op dat, als we  $b_2 > 0$  en  $b_3 > 0$  kiezen, automatisch aan punt 1 voldaan is. Zodoende definiëren we het domein van  $b_2$  en  $b_3$  dan ook als volgt:  $b_2, b_3 \in [1, \infty)$ .

Bij de vijf beschreven stappen om baanverplaatsingen mogelijk te maken, wordt er ook gelet op de achterligger in de andere baan. Het zomaar van baan verwisselen zonder de achterligger in ogenschouw te nemen is immers ook niet zo verstandig. We kunnen ons wel voorstellen wat er gebeurt als een voertuig met een snelheid van 80 km/uur zich verplaatst naar een baan waar zijn achterligger een snelheid heeft van 120 km/uur. Het laatst genoemde voertuig zal dus moeten remmen (mits dit vereist is door de afstand), wat een belangrijke factor zal blijken te zijn voor filevorming.

### Dichtheid

In hoofdstuk 2 hadden we de dichtheid gedefinieerd als het aantal voertuigen per eenheid weglengte. Nemen we ingeval van cellulaire automaten de lengte van één cel als eenheid weglengte,

dan kunnen we dichtheid als volgt berekenen door een vaste cel  $i$  te kiezen:

$$\bar{\rho}_i = \frac{1}{\Delta t} \sum_{t=T_0+1}^{T_0+\Delta t} n_i(t),$$

waarbij  $T_0$  een willekeurig tijdstip is vanwaar gedurende een tijdsinterval  $\Delta t$  gekeken wordt hoe vaak cel  $i$  een voertuig heeft bevat; daartoe is

$$n_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{als cel } i \text{ ten tijde } t \text{ een voertuig bevat,} \\ 0 & \text{als cel } i \text{ ten tijde } t \text{ geen voertuig bevat.} \end{cases}$$

Volgens de Wet van de Grote Aantallen kunnen we het volgende concluderen:

$$\bar{\rho}_i \rightarrow \rho, \quad [\Delta t \rightarrow \infty].$$

### Intensiteit

De intensiteit kan op een soortgelijke manier berekend worden als de dichtheid. In hoofdstuk 2 werd de intensiteit gedefinieerd als het aantal voertuigen per tijdseenheid. We kunnen ingeval van cellulaire automaten een vaste cel  $i$  beschouwen waarbij we aantal voertuigen bijhouden dat gedurende een tijdsinterval van  $\Delta t$  tijdseenheden, cel  $i$  gepasseerd zijn. Dan kan makkelijk afgeleid worden wat het gemiddeld aantal voertuigen per tijdseenheid is:

$$Q_i = \frac{1}{\Delta t} \sum_{t=T_0+1}^{T_0+\Delta t} n_{i,i+1}(t),$$

waarbij  $T_0$  een willekeurig tijdstip is vanwaar gedurende een tijdsinterval  $\Delta t$  gekeken wordt hoeveel voertuigen cel  $i$  gepasseerd zijn; daartoe is  $n_{i,i+1}(t)$  het aantal voertuigen dat van cel  $i$  naar cel  $i+1$  is gegaan. Een voertuig dat in één iteratiestap van cel  $i-1$  naar cel  $i+1$  is gegaan, heeft onderweg ook cel  $i$  aangedaan en dus wordt zo een dergelijk voertuig ook meegeteld in  $n_{i,i+1}(t)$ .

Deze manier om de dichtheid te berekenen komt erop neer dat we het gemiddeld aantal rondjes over een tijdsinterval  $\Delta t$  tellen in figuur 2.4.

## 3.2 Macroscopische modellen

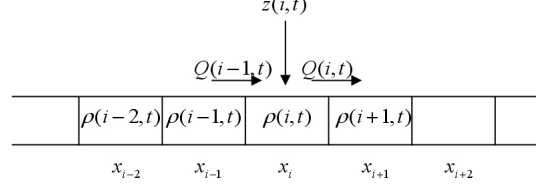
De modellen die in deze categorie vallen beschrijven het verkeer op een laag detailniveau zonder onderscheid te maken tussen de componenten waaruit het verkeer is opgebouwd. Dus in tegenstelling tot microscopische modellen, waarbij het gedrag van individuele voertuigen beschreven wordt, wordt bij macroscopische modellen het verkeer gerepresenteerd door grootheden als intensiteit, dichtheid en snelheid. Deze grootheden hebben we reeds in hoofdstuk 2 besproken.

In hoofdstuk 2 werd ook al gesproken over de wet van behoud van voertuigen. We zullen deze wet nu tot uitdrukking laten komen door middel van een partiële differentiaalvergelijking.

### 3.2.1 Behoud van voertuigen

Om de partiële differentiaalvergelijking af te leiden, verdelen we een weg in kleine gebieden ter grootte van  $\Delta x$ . Ieder gebied  $i$  heeft een dichtheid op een bepaald tijdstip  $t_j$ , wat genoteerd

wordt als  $\rho(i, j)$ . De dichtheid geeft het aantal voertuigen per eenheid weglengte weer (zie ook hoofdstuk 2), dus het aantal voertuigen in een gebied ter lengte  $\Delta x$  is gelijk aan  $\rho(i, j)\Delta x$ . Zie ook figuur 3.3.



**Figuur 3.3.** Voorstelling bij de afleiding van de partiële differentiaalvergelijking.

In hoofdstuk 2 hebben we ook het begrip intensiteit ingevoerd, genoteerd als  $Q(x, t)$ , wat per definitie het aantal voertuigen per tijdseenheid is. Wanneer we kijken naar de verandering in de dichtheid ten gevolge van een tijdstap  $\Delta t$ , dan zien we dat de instroom van gebied  $i$  gelijk is aan  $Q(i-1, j)\Delta t + z(i, j)\Delta x\Delta t$ , waarbij  $z(i, j)$  is uitgedrukt per eenheid tijd en eenheid weglengte en  $z(i, j)$  gezien kan worden als de netto-toestroom afkomstig van invoegstroken en uitvoegstroken. De uitstroom van gebied  $i$  is gelijk aan  $Q(i, j)\Delta t$ .

Nu de instroom en uitstroom van gebied  $i$  bekend is, kan een vergelijking opgesteld worden voor het aantal voertuigen in het gebied  $i$  op tijdstip  $j+1$ , één tijdstap later:

$$\rho(i, j+1)\Delta x = \rho(i, j)\Delta x + Q(i-1, j)\Delta t + z(i, j)\Delta x\Delta t - Q(i, j)\Delta t.$$

De bovenstaande vergelijking kan anders worden geschreven:

$$\begin{aligned} \rho(i, j+1)\Delta x - \rho(i, j)\Delta x + Q(i, j)\Delta t - Q(i-1, j)\Delta t &= z(i, j)\Delta x\Delta t \Leftrightarrow \\ \frac{\rho(i, j+1) - \rho(i, j)}{\Delta t} + \frac{Q(i, j) - Q(i-1, j)}{\Delta x} &= z(i, j). \end{aligned}$$

Laat nu  $\Delta t$  en  $\Delta x$  naar 0 naderen (waardoor de grootte van de tijdstap en de grootte van de gebieden naar 0 naderen), en de partiële differentiaalvergelijking voor het behoud van voertuigen wordt gevonden:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = z(x, t).$$

Wanneer we een weg zonder invoegstroken en uitvoegstroken beschouwen, dan gaat bovenstaande partiële differentiaalvergelijking over in

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0.$$

### 3.2.2 LWR model

Een in de praktijk veel gebruikt macroscopisch model is het model van Lighthill, Whitham en Richards en wordt derhalve aangeduid met het LWR model. Naast de hiervoor afgeleide differentiaalvergelijking met betrekking tot het behoud van voertuigen, spelen nog twee andere vergelijkingen een belangrijke rol in dit model: (1) de fundamentele vergelijking en (2) een relatie tussen de gemiddelde snelheid en de dichtheid, welke gegeven wordt door

$$v(x, t) = F(\rho(x, t)),$$

waarbij  $F$  een zelfgekozen functie is.

Dit model is continu in zowel tijd als plaats. Om in de praktijk iets met dergelijke modellen te doen, zullen we het model moeten discretiseren. We zien heel eenvoudig in dat het discretiseren van het behoud van voertuigen leidt tot de volgende uitdrukking (zie ook de vorige sectie):

$$\begin{aligned}\rho(i, t+1)\Delta x &= \rho(i, t)\Delta x + Q(i-1, t)\Delta t + z(i, t)\Delta x\Delta t - Q(i, t)\Delta t \\ \Leftrightarrow \\ \rho(i, t+1) &= \rho(i, t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} [Q(i-1, t) + z(i, t)\Delta x - Q(i, t)].\end{aligned}$$

Wanneer we wederom een weg zonder invoegstroken en uitvoegstroken beschouwen, dan gaat dit over in

$$\rho(i, t+1) = \rho(i, t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} [Q(i-1, t) - Q(i, t)].$$

We kunnen dus voor iedere discrete  $x$  en  $t$  de intensiteit  $Q(x, t)$ , snelheid  $V(x, t)$  en de dichtheid  $\rho(x, t)$  berekenen met de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} V(x, t) = F(\rho(x, t)), \\ Q(x, t) = \rho(x, t)V(x, t), \\ \rho(x, t+1) = \rho(x, t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} [Q(x-1, t) - Q(x, t)]. \end{cases}$$

### 3.2.3 Payne model

Het LWR model bevat slechts één partiële differentiaalvergelijking, namelijk voor het behoud van voertuigen. Het model van Payne bevat daarnaast nog een tweede partiële differentiaalvergelijking. In dit model wordt er vanuit gegaan dat de snelheid niet alleen afhangt van de dichtheid, zoals dat wel het geval was in het LWR model. We hebben nu te maken met de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V(\rho) - v}{T} - \frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

waarin  $T$  en  $c_0$  constanten zijn. Deze vergelijking geeft de versnelling van een voertuig weer. In tegenstelling tot het LWR model wordt de snelheid geleidelijk aangepast wanneer een voertuig van een gebied naar het volgende gebied gaat. Dit komt tot uitdrukking in de term

$$v \frac{\partial v}{\partial x},$$

en daardoor heeft de gemiddelde snelheid in een gebied  $i$  gevolgen voor de snelheid in gebied  $i+1$ . Verder zal ieder voertuig zijn snelheid aanpassen tot de gewenste snelheid  $V(\rho)$ , de stationaire snelheid bij dichtheid  $\rho$ . De snelheid waarmee dit gebeurt is afhankelijk van de parameter  $T$ .

De laatste term

$$\frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

heeft te maken met de aanpassing van de snelheid tengevolge van de verandering van de dichtheid. Zo zal een voertuig vertragen wanneer deze een in volgend gebied een grotere dichtheid

waarneemt. Anderzijds zal een voertuig versnellen als de dichtheid in een volgend gebied lager is dan de dichtheid van het gebied waar het voertuig zich op dat moment bevindt.

Ook dit model moeten we weer discretiseren om er in de praktijk iets mee te kunnen doen. We nemen nu  $\Delta x$  en  $\Delta t$  voor respectievelijk de grootte van het gebied en de tijdstap, dan vinden we:

$$\begin{aligned} & \frac{v(x, t+1) - v(x, t)}{\Delta t} + v(x, t) \frac{v(x+1, t) - v(x, t)}{\Delta x} = \\ & = \frac{V(\rho(x, t)) - v(x, t)}{T} - \frac{c_0^2}{\rho(x, t)} \frac{\rho(x+1, t) - \rho(x, t)}{\Delta x} \\ & \Leftrightarrow v(x, t+1) = v(x, t) - v(x, t) \frac{\Delta t}{\Delta x} [v(x+1, t) - v(x, t)] \\ & + \frac{\Delta t}{T} [V(\rho(x, t)) - v(x, t)] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{c_0^2 (\rho(x+1, t) - \rho(x, t))}{\rho(x, t)}. \end{aligned}$$

In [3] vinden we de volgende uitdrukking (rekening houdende met onze notatie), wat equivalent is met het bovenstaande na wat transformaties op de variabelen:

$$\begin{aligned} v(x, t+1) &= v(x, t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} v(x, t) [v(x+1, t) - v(x, t)] \\ &+ \frac{\Delta t}{\tau} [V(\rho(x, t)) - v(x, t)] - \frac{\nu_a}{\tau} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(\rho(x+1, t) - \rho(x, t))}{(\rho(x, t) + \kappa)}, \end{aligned}$$

waarin  $\tau$  een constante is voor de tijd,  $\nu_a$  een constante is voor de anticipatie (op de dichtheid in een volgend gebied) en  $\kappa$  een tuning parameter.

### 3.3 Wachtrijtheorie

Een heel ander type model waarmee we het verkeer kunnen beschrijven, komt uit de wachtrijtheorie. We zullen, voordat we deze theorie toe gaan passen om het verkeer mee te modelleren, eerst wat basisbegrippen behandelen die te maken hebben met wachtrijtheorie.

#### 3.3.1 Basis

Voor het ontstaan van een wachtrij moeten we te maken hebben met een service of dienst waarbij klanten geholpen worden. Bovendien moeten de klanten daadwerkelijk arriveren bij de dienstverlener om ervan gebruik te kunnen maken. Het ligt dan voor de hand om het één en ander vast te leggen over het aankomstproces van klanten en over de bediening. Daarnaast is het van belang om te weten hoeveel klanten er eigenlijk kunnen wachten in de wachtrij totdat ze aan de beurt zijn en ook de populatiegrootte kan van belang zijn.

#### Aankomstproces

De populatie van waaruit de klanten bij de service arriveren kan eindig of oneindig groot zijn. Alleen ingeval van een oneindig grote populatie, kan een *Poisson proces* gekozen worden om aankomsten te modelleren. De eigenschappen van een Poisson proces zijn als volgt [15]:

- De klanten komen één voor één aan.
- De aantallen aankomsten in disjuncte tijdsintervallen zijn onafhankelijk van elkaar.
- De kansverdeling van het aantal klanten dat aankomt in een gegeven tijdsinterval heeft een Poisson verdeling waarvan de verwachtingswaarde evenredig is met de lengte van het tijdsinterval.

Uit het derde punt volgt dat de tussenaankomsttijden exponentieel verdeeld zijn. Behalve een Poisson aankomstproces, kunnen ook deterministische aankomstprocessen worden beschouwd, waarbij precies vast staat wanneer een klant arriveert.

### Bedieningseigenschappen

Iedere klant die in bediening gaat, zal een tijd bediend worden. Er zijn drie mogelijkheden om deze bedieningsduur vast te leggen, namelijk (1) een deterministische bedieningsduur, (2) een bedieningsduur die exponentieel verdeeld is en (3) een bedieningsduur die een algemene kansverdeling bezit.

Ingeval van een deterministische bedieningsduur weten we exact hoelang een klant in bediening blijft. Bij de exponentiële bedieningsduur en de bedieningsduur die een algemene kansverdeling bezit, is dit niet bekend. Een eigenschap van de exponentiële verdeling is zijn geheugenloosheid. Het maakt voor de resterende bedieningsduur niet uit of een klant nu 1 minuut of 5 minuten in bediening is.

We specificeren ook het aantal servers die beschikbaar zijn en tevens een methode om klanten uit de wachtrij te halen. Dit kan op basis van *First Come First Served* (FCFS), waarbij klanten geholpen worden op basis van hun aankomsttijdstip, maar het kan ook op andere manieren. Bovendien kunnen bepaalde klanten een hogere prioriteit hebben, dan spreken we van priority queues.

### Wachtrij

Het aantal klanten dat toe kan treden tot de wachtrij is van belang. Er wordt onderscheid gemaakt tussen eindige wachtrijen en oneindige wachtrijen. Eindige wachtrijen kunnen slechts een eindig aantal klanten aan en nieuwe aankomende klanten zullen dan niet meer kunnen toetreden tot de wachtrij wanneer die maximale capaciteit bereikt is. Bij oneindige wachtrijen kan iedere nieuwe klant toetreden.

### Kendall's notatie

Om makkelijk het type wachtrijmodel weer te geven, maken we gebruik van Kendall's notatie die bestaat uit:

$$a/b/c/d/e.$$

Hierin representeert  $a$  het aankomstproces, welke dus deterministisch (D) of volgens een Poisson proces (M) kan zijn; de letter  $b$  representeert de bediening, waarbij M dan staat voor een exponentieel verdeelde bedieningsduur, D staat voor een deterministische bedieningsduur en G staat voor een bedieningsduur met een algemene kansverdeling; de letter  $c$  representeert het

aantal servers met  $c \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ ; de letter  $d$  wordt gebruikt om aan te geven hoeveel klanten in het systeem aanwezig kunnen zijn (i.e., het aantal wachtende klanten + het aantal klanten in bediening) met  $d \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ ; de letter  $e$  staat voor de populatiegrootte met  $e \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ . Overigens wordt vaak oneindig niet genoteerd en wordt derhalve de letter weggelaten.

**Een voorbeeld** Beschouw een postkantoor met 2 loketten. Per minuut komen er gemiddeld 3 klanten aan. Het ligt voor de hand om het aankomstproces volgens een Poisson proces te laten verlopen. De bedieningsduur per klant is variabel, maar we weten wel de gemiddelde bedieningsduur. Derhalve is een deterministische bedieningsduur niet mogelijk. We kiezen voor een bedieningsduur die exponentieel verdeeld is. De bediening neemt gemiddeld 30 seconden in beslag. Aangezien het postkantoor wil dat de wachtrij niet al te lang wordt, worden er geen klanten meer toegelaten als het aantal klanten in het systeem 30 bedraagt.

We hebben nu het volgende model gevonden: Als we als tijdseenheid een minuut nemen, dan is het aankomstproces een Poisson proces met rate  $\lambda = 3$  (i.e., gemiddeld 3 klanten per minuut), de bedieningsduur is exponentieel verdeeld met parameter  $\mu = 2$  ( $\mathbb{E}(B) = 1/\mu$  met  $B \sim \exp(\mu)$ ) en  $\mathbb{E}(B)$  de verwachte bedieningsduur). De populatiegrootte is oneindig.

Noteren we dit met behulp van Kendall's notatie, dan wordt dit:  $M/M/2/30$ .

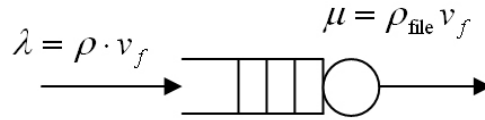
### 3.3.2 Verkeersmodel

Net als bij cellulaire automaten wordt de weg opgedeeld in gebieden. Bij het wachtrijmodel zal ieder gebied een grootte hebben van  $1/\rho_{file}$ . Herinner dat  $\rho_{file}$  die dichtheid is waarbij sprake is van file. Ieder voertuig heeft dan dus minimaal  $1/\rho_{file}$  aan ruimte nodig.

We zien nu een willekeurig gebied van lengte  $1/\rho_{file}$  als een service station waar voertuigen (klanten) aankomen. Het is van belang om te weten hoe lang een willekeurig voertuig nodig heeft om het servicestation te verlaten. Als we veronderstellen dat ieder voertuig met een snelheid van  $v_f$  (snelheid in de fase van free flow) voortbeweegt, dan duurt het  $\mathbb{E}(B) = 1/(\rho_{file}v_f)$  tijdseenheden om door het servicestation heen te komen.

In de situatie waarbij ieder voertuig de snelheid kan rijden die geldt in de free flow fase, zullen voertuigen het service station bereiken met rate  $\lambda = \rho v_f$ , waarbij  $\rho$  de dichtheid van het verkeer is. We nemen aan dat de aankomsten bij het servicestation volgens een Poisson proces geschieden.

Het model dat we gebruiken is dus een  $M/G/1$  model, omdat we geen aannames hebben gemaakt met betrekking tot de kansverdeling van de servicetijd. In figuur 3.4 is het wachtrij model weergegeven door middel van een afbeelding.



**Figuur 3.4.** Het  $M/G/1$  wachtrijmodel.

Voor een  $M/G/1$  wachtrijmodel kan geen eenvoudige uitdrukking gevonden worden voor de evenwichtsverdeling van het aantal klanten in het systeem. We kunnen echter gebruik maken van de Pollaczek-Khintchine formule om de gemiddelde lengte van de wachtrij te bepalen. Het

gaat hier dus om het aantal voertuigen dat moeten wachten voordat ze over het bepaalde gebied kunnen wat gemerkt staat als servicestation.

Met  $L_q$  geven we de gemiddelde lengte van de wachtrij aan, en is gelijk aan:

$$L_q = \frac{u^2(1 + c_B^2)}{2(1 - u)}.$$

Hierin is  $c_B$  de variatiecoëfficiënt van de bedieningsduur en deze is gelijk aan  $c_B = \sigma(B)/\mathbb{E}(B)$ ,  $\mathbb{E}(B)$  is de verwachting van de bedieningsduur en  $u = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda\mathbb{E}(B)$ .

Graag hebben we ook inzicht in de wachttijd van een voertuig in het systeem. Door gebruik te maken van de formule van Little, welke zegt dat  $L_q = \lambda W_q$ , krijgen we:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{u^2(1 + c_B^2)}{2(1 - u)\lambda} = \frac{u\lambda\mathbb{E}(B)(1 + c_B^2)}{2(1 - u)\lambda} = \frac{u\mathbb{E}(B)(1 + c_B^2)}{2(1 - u)}.$$

Hierbij is  $W_q$  dan de notatie voor de gemiddelde wachttijd in de wachtrij.

Voor het gemiddeld aantal voertuigen (klanten) in het systeem (i.e., in bediening en in de wachtrij) vinden we dan vervolgens:

$$L = L_q + u.$$

Voor de gemiddelde wachttijd inclusief bediening vinden we:

$$W = W_q + \mathbb{E}(B).$$

We substitueren nu alle gegevens van het wachtrijmodel in de uitdrukking voor  $W$  en dan wordt de tijd gevonden dat het duurt voor een willekeurig voertuig om bij aankomst bij het servicestation, dit servicestation door te gaan.

$$\begin{aligned} W &= \frac{u\mathbb{E}(B)(1 + c_B^2)}{2(1 - u)} + \mathbb{E}(B) = \frac{\frac{\rho v_f}{\rho_{file} v_f} \mathbb{E}(B) \left(1 + \frac{\sigma^2(B)}{\mathbb{E}(B)^2}\right)}{2 \left(1 - \frac{\rho v_f}{\rho_{file} v_f}\right)} + \mathbb{E}(B) = \\ &= \frac{\frac{\rho}{\rho_{file}} \left(\mathbb{E}(B) + \frac{\sigma^2(B)}{\mathbb{E}(B)}\right)}{2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{file}}\right)} + \mathbb{E}(B) = \frac{1}{\rho_{file} v_f} + \frac{\frac{\rho}{\rho_{file}} \left(\frac{1}{\rho_{file} v_f} + \sigma^2(B) \rho_{file} v_f\right)}{2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{file}}\right)} = \\ &= \frac{1}{\rho_{file} v_f} + \frac{\frac{\rho^2}{\rho_{file}^2 v_f} + \sigma^2(B) \rho v_f}{2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{file}}\right)} = \frac{1}{\rho_{file} v_f} + \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_{file}}\right)^2 + \sigma^2(B) \rho^2 v_f^2}{2(\rho v_f) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{file}}\right)}. \end{aligned}$$

De eigenlijke snelheid waarmee het gebied ter lengte  $1/\rho_{file}$  wordt afgelegd, is nu niet  $v_f$ . Vanwege het ontstaan van een wachtrij bij het service station zal de echte snelheid (waarmee een voertuig daadwerkelijk het gebied passeert) lager uitkomen. De echte snelheid waarmee het gebied ter lengte  $1/\rho_{file}$  wordt afgelegd bedraagt nu:

$$v(\rho) = \frac{1/\rho_{file}}{W}.$$

**Een voorbeeld** We beschouwen een weg waarbij de vrije snelheid van voertuigen gelijk is aan 100 km/uur. Op een kilometer rijden gemiddeld 60 voertuigen zodat  $\rho = 60$  voertuigen per kilometer en de dichtheid waarbij sprake is van file nemen we gelijk aan 200 voertuigen per kilometer zodat  $\rho_{file} = 200$ . Verder nemen we voor het gemak aan dat de variatie in bediening tussen voertuigen te verwaarlozen is. Het invullen van de uitdrukking van  $W$  levert dan op:

$$W = \frac{1}{200 \cdot 100} + \frac{\left(\frac{60}{200}\right)^2}{2(60 \cdot 100) \left(1 - \frac{60}{200}\right)} = 6.0714 \cdot 10^{-5} \text{ uur.}$$

De echte snelheid waarmee voertuigen nu een afstand van  $1/\rho_{file} = 5$  meter afleggen, is slechts  $1/(200 \cdot 6.0714 \cdot 10^{-5}) \approx 82$  km/uur in plaats van 100 km/uur.

Hierboven hebben we een verband gevonden tussen de snelheid en de dichtheid. Omdat het aan de hand van de gevonden vergelijking niet eenvoudig is om te zien hoe de invloed van de waarden van  $\rho_{file}, v_f$  en  $\sigma(B)$  op de gemiddelde snelheid is, zullen we hieronder het een en ander in grafieken weergegeven. Voor verschillende waarden van  $\rho_{file}, v_f$  en  $\sigma(B)$  staan de resultaten weergegeven in figuur 3.5. Hierin correspondeert de blauwe lijn met  $\sigma(B) = 0$ , de groene lijn met  $\sigma(B) = 0.00001$ , de rode lijn met  $\sigma(B) = 0.0001$  en de paarse lijn met  $\sigma(B) = 0.001$ . Merk op dat het  $M/G/1$  model met  $\sigma(B) = 0$  overgaat in een  $M/D/1$  model.

Het blijkt dat een grotere variatie van de bedieningsduur leidt tot een lagere snelheid bij een vaste waarde van  $\rho$ . Dit kon overigens ook heel gemakkelijk ingezien worden vanuit de formule voor de gemiddelde snelheid  $v(\rho)$ , aangezien de factor  $\sigma(B)$  alleen voorkomt in de teller in de formule voor  $W$ .

Merk op dat een waarde van 0.001 voor  $\sigma(B)$  al relatief groot is. Over een afstand van  $1/\rho_{file}$  rijden voertuigen gemiddeld met een snelheid van  $1/(\rho_{file} v_f)$  km/uur. Nemen we nu  $\rho_{file} = 200$  en  $v_f = 100$  (zoals gebruikt in figuur 3.5(a)), dan is  $E(B) = 0.18$  seconden. Dus 5 meter wordt afgelegd in 0.18 seconden. Vergelijk deze 0.18 seconden nu eens met  $\sigma(B) = 0.001$  met als tijdseenheid een uur, wat overeenkomt met 3.6 seconden. We zien dan dat de standaard deviatie van de bedieningsduur relatief groot is ten opzichte van het gemiddelde.

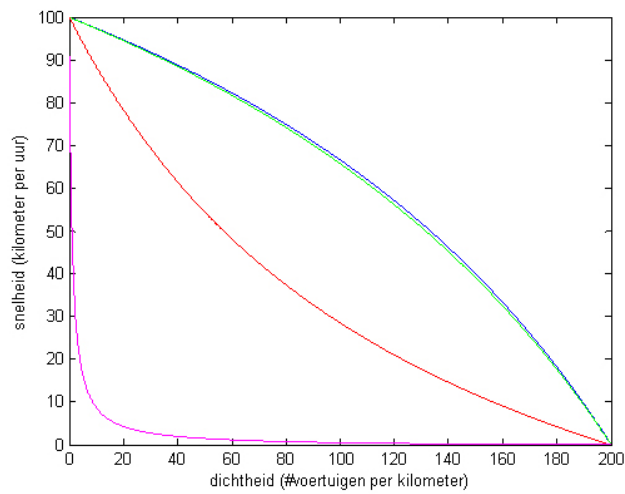
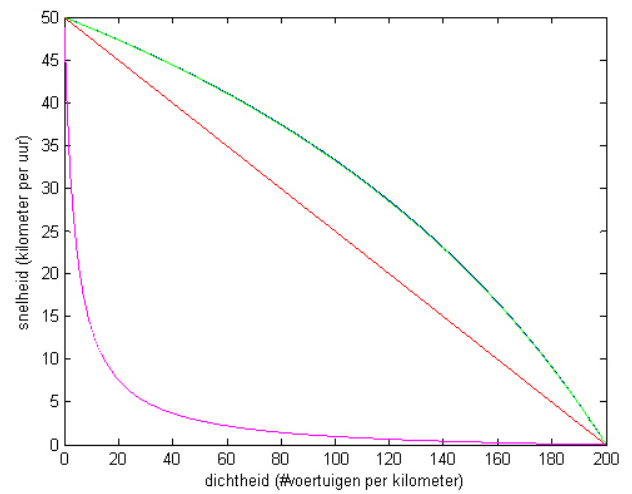
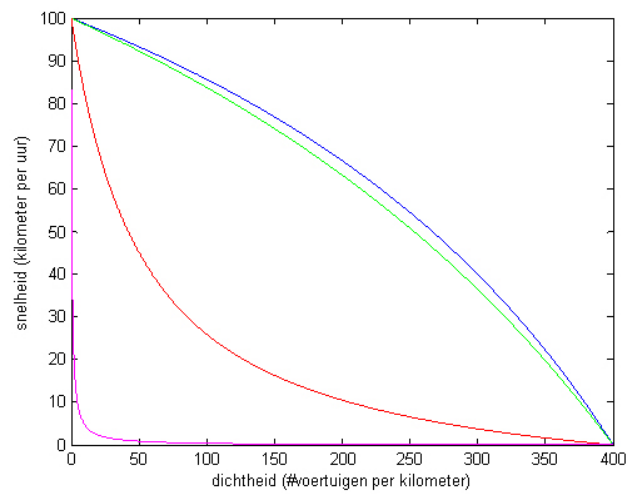
### 3.4 Eigen model

We kunnen diverse aspecten van verschillende modellen combineren om zo tot een nieuw model te komen. Aan de andere kant kunnen we ook met nieuwe aspecten komen die een bestaand model verrijken. Het eigen model zal voortbouwen op het cellulaire automaten model met daarbij een aantal extra aspecten.

In de werkelijkheid lijkt het aannemelijk dat het gedrag van een voertuig niet slechts alleen afhankelijk is van de directe voorganger. Ook met het tweede voertuig dat voor hem rijdt, zal rekening gehouden worden. Daartoe zullen we in het eigen model rekening houden dat voertuig  $\alpha - 1$  en  $\alpha - 2$  de snelheid van voertuig  $\alpha$  bepalen.

Bovendien lijkt de constante remkans in het cellulaire automaten model niet realistisch. Voertuigen die zich bevinden in dicht verkeer zullen eerder geneigd zijn af te remmen dan op een vrij weggedeelte. We zullen in het eigen model de remkans van een voertuig laten afhangen van de afstand met zijn voorganger.

We gaan uit van het oorspronkelijke cellulaire automaten model, gegeven door de volgende update-regels:

(a)  $\rho_{file} = 200, v_f = 100$ .(b)  $\rho_{file} = 200, v_f = 50$ .(c)  $\rho_{file} = 400, v_f = 100$ .**Figuur 3.5.** Snelheid als functie van de dichtheid bij het M/G/1 model.

1.  $v_\alpha := \min(v_\alpha + 1, v_{max})$ .
2.  $v_\alpha := \min(v_\alpha, d_\alpha)$ .
3. Met kans  $p$  verlaagt voertuig  $\alpha$  zijn snelheid met 1 eenheid tot  $\max(v_\alpha - 1, 0)$ .
4. Voertuig  $\alpha$  gaat van  $x_\alpha$  naar  $x_\alpha + v_\alpha$ .

Om de remkans afhankelijk te maken van de afstand tot de voorganger, definiëren we de remkans als volgt:

$$p_\alpha = \begin{cases} p_0 & \text{als } d_\alpha = 1, \\ \frac{p_0}{d_\alpha} & \text{als } d_\alpha > 1. \end{cases}$$

Nu hangt de index  $\alpha$  aan de remkans  $p$ , omdat de remkans voor ieder voertuig anders kan zijn en afhangt van de afstand tot zijn voorganger. Bij een grote afstand verkrijgen we een kleine remkans en bij een kleine afstand tot de voorganger wordt  $p_\alpha$  juist groter. Merk op dat er geen remkans gedefinieerd is als  $d_\alpha = 0$ . Later zal duidelijk worden waarom we dit niet hoeven te definiëren.

Om de snelheid van voertuig  $\alpha$  af te laten hangen van voertuig  $\alpha - 1$  en  $\alpha - 2$  passen we regel 2 in het oorspronkelijk cellulaire automaten model aan op de volgende wijze:

$$v_\alpha := \min \left( v_\alpha + c \left[ \beta - \frac{2}{(d_\alpha + 1)(d_{\alpha-1} + 1)} \right], d_\alpha \right),$$

waarna  $v_\alpha$  afgerond wordt op een geheel getal. Hierbij is (volgens de definitie)  $d_\alpha$  het aantal cellen tussen voertuig  $\alpha$  en  $\alpha - 1$  en  $d_{\alpha-1}$  het aantal cellen tussen voertuig  $\alpha - 1$  en  $\alpha - 2$ ;  $c$  en  $\beta$  zijn constanten.

Het eigen model ziet er nu als volgt uit:

1.  $v_\alpha := \min(v_\alpha + 1, v_{max})$ .
2.  $v_\alpha := \min \left( v_\alpha + c \left[ \beta - \frac{2}{(d_\alpha + 1)(d_{\alpha-1} + 1)} \right], d_\alpha \right)$ , waarna  $v_\alpha$  afgerond wordt op een geheel getal.
3. Met kans  $p_\alpha$  verlaagt voertuig  $\alpha$  zijn snelheid met 1 eenheid tot  $\max(v_\alpha - 1, 0)$ .
4. Voertuig  $\alpha$  gaat van  $x_\alpha$  naar  $x_\alpha + v_\alpha$ .

Het is nu duidelijk waarom we de remkans bij  $d_\alpha = 0$  niet gedefinieerd hebben. Immers, als  $d_\alpha = 0$  volgt met regel 2 dat de snelheid van voertuig  $\alpha$  gelijk is aan 0 en dus maakt de grootte van de remkans bij  $d_\alpha = 0$  niets uit.

In regel 2 is  $c$  voor te stellen als een gevoeligheidsfactor en is  $\beta \in [0, 2]$  een soort van gewenste waarde. De breuk  $2/[(d_\alpha + 1)(d_{\alpha-1} + 1)]$  levert een waarde tussen de 0 en de 2. De achterliggende gedachte achter deze vernieuwde update-regel is dat voor grote waarden van deze breuk, de afstand tot de voorganger en de afstand van de voorganger tot zijn voorganger, erg klein is. Men zou dan zijn eigen snelheid willen verlagen. Anderzijds, voor kleine waarden van de breuk is de afstand met de voorganger en de afstand van de voorganger tot zijn voorganger redelijk groot, waardoor men zou willen versnellen. De parameter  $\beta$  speelt in deze een belangrijke rol, daar deze bepaald wanneer er versneld of afgeremd wordt. Merk op dat voertuig  $\alpha$  te allen tijde wil versnellen als zijn snelheid onder de maximum snelheid zit; dit gebeurt met 1 eenheid zoals volgt uit regel 1. Door  $\beta = 0$  te kiezen, zal de snelheid in regel 2 niet nogmaals verhoogd worden. Derhalve blijft dan de maximale snelheidsverhoging beperkt tot 1 eenheid.

**Voorbeeld** Beschouw de volgende situatie:  $v_\alpha = 3, d_\alpha = 3, v_{\alpha-1} = 0, d_{\alpha-1} = 0$ . Met  $\beta = 1/8$  en  $c = 5$  passen we regel 2 toe om de nieuwe snelheid van voertuig  $\alpha$  te berekenen. Uit regels 1 volgt dat  $v_\alpha = 4$ . Deze waarde wordt gebruikt in regel 2:

$$v_\alpha = \min \left( 4 + 5 \left[ \frac{1}{8} - \frac{2}{4 \cdot 1} \right], 3 \right) = 2.$$

In de werkelijkheid zal de snelheid van voertuigen afhangen van de afstand tot de voorganger. Hoe kleiner de afstand, des te lager de snelheid. Maar ook de situatie van de voorganger zal meegenomen worden in de beslissing om al dan niet de snelheid aan te passen. Zodra een bestuurder ziet dat zijn voorganger erg dicht op zijn voorganger rijdt, zal de bestuurder liever zijn snelheid iets willen verlagen. Het effect van de afstand tussen voorganger en zijn voorganger neemt natuurlijk af naarmate de afstand met de eigen directe voorganger groter wordt. Het eigen model voldoet hieraan.



## Hoofdstuk 4

# Simulatie

In het vorige hoofdstuk zijn een aantal modellen beschreven waarmee het gedrag van het verkeer op microscopisch en macroscopisch niveau beschreven kan worden. Ook hebben we het fundamentele diagram getekend welke behoort bij het wachtrijmodel. Van de microscopische en macroscopische modellen kunnen we ook de fundamentele diagrammen bepalen. We zullen dit doen door middel van een zelfgeschreven simulatie programma. Daarnaast zal door het simulatie programma het verloop van de plaats als functie van de tijd in een plaats-tijd-diagram weergegeven worden. We beperken ons dan tot de microscopische modellen.

Simulatie is een mooie methode om de werking van diverse modellen te visualiseren en door het veranderen van de parameters van een model is direct de invloed op het gedrag van het verkeer waar te nemen. Daarbij kan simulatie ook helpen in het bedenken of het testen van nieuwe verkeersregels en maatregelen om filevorming tegen te gaan. Voorwaarde is echter wel dat er een goed model gebruikt wordt waarop de simulatie gebaseerd is.

We zullen in dit hoofdstuk de werking bespreken van de simulatie van het cellulaire automaten model, zowel voor één- als tweebaanswegen, het Intelligent Driver Model en het eigen ontwikkeld model. In het volgende hoofdstuk zullen we ingaan op de resultaten uit de simulatie.

### 4.1 Werking

Om het gedrag van het verkeer te simuleren, moet er nagedacht worden over de manier waarop verkeer afgebeeld wordt op een computerscherm. Om het gedrag van de voertuigen in de tijd weer te geven, kiezen we voor het plaats-tijd-diagram. Om een verband af te leiden tussen de grootheden intensiteit, dichtheid en snelheid zullen we deze grootheden in paren van twee afbeelden in het fundamenteel diagram. Andere aspecten waar rekening mee gehouden moet worden betreft de instroom en uitstroom van verkeer, een geschikte keuze voor de tijdseenheid en plaatseenheid en de initiële plaatsing van de voertuigen.

### 4.2 Plaats-tijd-diagram

Het plaats-tijd-diagram wordt afgebeeld met de tijd op de horizontale as en de plaats op de verticale as in het twee-dimensionale vlak. In de simulatie wordt de plaats van een voertuig

aangegeven met een gekleurd puntje in het plaats-tijd-diagram. Daarbij is de kleur afhankelijk van de snelheid van het voertuig [figuur 4.1]. Ingeval van het cellulaire automaten model voor tweebaanswegen zal het plaats-tijd-diagram afgebeeld worden voor zowel de linkerbaan als de rechterbaan, welke naast elkaar getoond worden.



**Figuur 4.1.** De snelheden in m/s en de bijbehorende kleur.

## 4.3 Tijdseenheid en plaatseenheid

Daar het beeld van een computerscherm opgebouwd is uit pixels, zullen we een manier moeten vinden waarop we de pixels benutten. We kiezen als tijdseenheid de seconde en laten 1 pixel van het computerscherm overeenkomen met 1 seconde. Voor het weergeven van de plaats maken we onderscheid tussen enerzijds het cellulaire automaten model en het eigen model en anderzijds het Intelligent Driver Model.

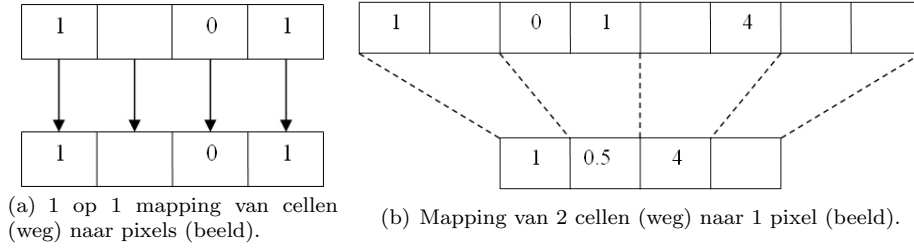
### 4.3.1 Cellulaire automaten

Bij het cellulaire automaten model wordt de weg opgedeeld in cellen die allen dezelfde grootte hebben. Daarbij kan iedere cel precies één voertuig bevatten. Als cellengte wordt voor 5 meter gekozen; dit is namelijk de gemiddelde lengte van een voertuig. Het ligt nu voor de hand om voor de plaats 1 pixel overeen te laten komen met 1 cel, zie figuur 4.2(a).

**Voorbeeld** Om een weg te simuleren hebben we de beschikking over 400 pixels. Eén pixel komt nu overeen met 1 cel, ofwel 5 meter. We simuleren zodoende een weg ter lengte van 2 kilometer.

Het voordeel van deze methode is dat iedere pixel overeenkomt met een gedeelte van de weg waar zich wel of geen voertuig bevind. Ieder puntje in het plaats-tijd-diagram representeert dan ook een uniek voertuig en de snelheid van het voertuig is te bepalen aan de hand van de kleur van het puntje. In het simulatie programma is het echter ook mogelijk om de gesimuleerde weglengte te vergroten. Bij een vast gegeven aantal pixels om een weg te simuleren, kan 1 pixel niet meer corresponderen met 1 cel. Daartoe worden voertuigen gegroepeerd en wordt de gemiddelde snelheid van de groep voertuigen afgebeeld, zie figuur 4.2(b).

**Voorbeeld** We hebben eveneens de beschikking over 400 pixels om een weg te simuleren. Echter, nu willen we een weg ter lengte van 4 kilometer simuleren. Eén pixel komt nu overeen met 10 meter, ofwel 2 cellen uit het cellulaire automaten model. Op deze 10 meter kunnen zich maximaal 2 voertuigen bevinden. De pixel krijgt nu een kleur die overeenkomt met de gemiddelde snelheid van de voertuigen die zich op deze 10 meter bevinden. Wanneer er zich geen voertuigen bevinden op deze 10 meter, dan krijgt de pixel geen kleur (i.e., wit, de achtergrond kleur van het plaats-tijd-diagram).



**Figuur 4.2.** Mapping van cellen van de weg naar pixels van het beeld. De bovenste rij cellen representeert de weg en de onderste rij cellen representeert het beeld. De getallen geven de snelheid van de voertuigen weer. Daar waar geen getal staat, betekent dat de cel geen voertuig bevat.

### 4.3.2 Intelligent Driver Model

Het Intelligent Driver Model is een continu model. Ingeval van het cellulaire automaten model kan een voertuig zich alleen in veelvouden van 5 meter verplaatsen, maar bij het Intelligent Driver Model is iedere (positief) continue verplaatsing denkbaar. Het gedrag van een voertuig wordt vastgelegd door zijn versnelling:

$$\frac{dv}{dt} = a \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left( \frac{d^*(v, \Delta v)}{d} \right)^2 \right], \text{ met } d^*(v, \Delta v) = d_0 + Tv + \frac{v\Delta v}{2\sqrt{ab}}.$$

We zouden hier eveneens een pixel overeen kunnen laten komen met een wegedeelte van 5 meter, maar beter is om een pixel overeen te laten komen met een wegedeelte van 1 meter. Op deze manier kan ook het verloop van zeer langzaam rijdend verkeer keurig gevolgd worden in het plaats-tijd-diagram. In het diagram wordt overigens alleen de plaats aangegeven van de achterbumper van een voertuig, net zoals dat het geval is in figuur 2.3.

We laten de lengte van een voertuig gelijk zijn aan 5 meter. Merk op dat we de weglengte maximaal 5 keer kunnen vergroten opdat nog steeds ieder voertuig apart te volgen is in het plaats-tijd-diagram. Immers, er dient ten minste 5 meter tussen twee opeenvolgende achterbumpers te zitten, omdat dit de lengte is van een voertuig en het niet mogelijk is dat voertuigen elkaar inhalen op éénbaanswegen.

Om de verplaatsing van een voertuig te bepalen, wordt de volgende formule gebruikt:

$$\frac{dx}{dt} = v + \frac{dv}{dt}.$$

### 4.3.3 Eigen model

Daar het eigen model een modificatie is van het oorspronkelijk cellulaire automaten model, zullen we bij dit model eveneens 1 pixel laten corresponderen met 1 cel, waarbij de cellengte gelijk is aan 5 meter.

## 4.4 Fundamentele diagrammen

Voor de fundamentele diagrammen worden de grootheden snelheid, dichtheid en intensiteit bepaald door te kijken naar een gedeelte van een weg. Er zal hiertoe een wegedeelte ter lengte van

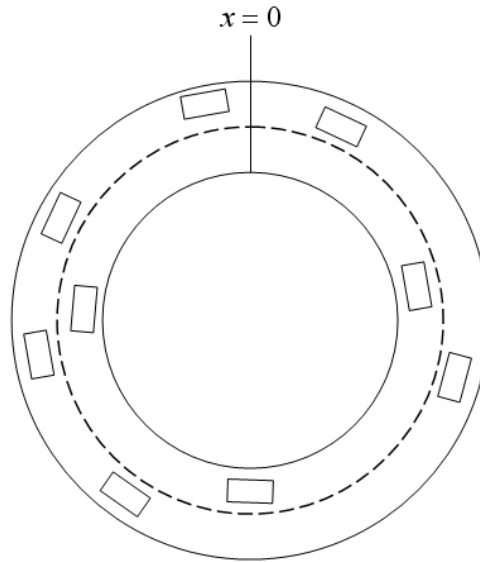
500 meter beschouwd worden, mits de gesimuleerde weglengte dit toelaat. Anders kiezen we voor die weglengte, zodat het geobserveerde gedeelte gelijk is aan het minimum van de gesimuleerde weglengte in meters en 500. Eens per 10 seconden zal de toestand van het weggedeelte bekeken worden en zal de gemiddelde snelheid en de dichtheid bepaald worden.

Herinner dat de gemiddelde snelheid  $V$  niks anders is dan de gemiddelde snelheid op dat weggedeelte en de dichtheid  $\rho$  het aantal voertuigen is op het weggedeelte, gedeeld door de lengte van het weggedeelte. Door het toepassen van de fundamentele vergelijking volgt dat  $Q = \rho V$ .

Bij het cellulaire automaten model voor tweebaanswegen zal het fundamenteel diagram bepaald worden door slechts te kijken naar één rijbaan. Dit zal echter geen beperking zijn, omdat de twee rijbanen als identiek beschouwd kunnen worden die verschillend van elkaar ontwikkelen vanwege een positieve remkans, maar tevens elkaar beïnvloeden vanwege een positieve kans om van baan te verwisselen. De gevolgen van een positieve kans om van baan te verwisselen zullen derhalve een invloed hebben op het verkeer op, bijvoorbeeld, de eerste rijbaan. Zodoende dus ook in het fundamenteel diagram.

## 4.5 Instroom en uitstroom

Een veel gebruikte manier om verkeer te simuleren is op een ronde weg. Het aantal voertuigen dat zich initieel op deze weg bevindt, blijft behouden; er kunnen geen voertuigen bijkomen of verdwijnen. Bij dergelijke ronde wegen geldt ‘instroom = uitstroom’. Immers, een ronde weg kan beschouwd worden als een rechte weg waarbij het eind vastgeplakt wordt aan het begin. Voertuigen die dus eigenlijk de weg zouden verlaten, vervolgen hun weg weer aan het begin. In figuur 4.3 is het principe van een ronde weg te zien. Hierin correspondeert  $x = 0$  met het begin en eind van de weg en de waarde van  $x$  zal met de klok mee oplopen.



**Figuur 4.3.** Voorstelling van een ronde weg.

Deze manier van simuleren zorgt ervoor dat ieder voertuig een voorganger heeft. Het is ook

mogelijk om daadwerkelijk een rechte weg te beschouwen, maar dan komen allerlei problemen naar voren met betrekking tot de uitstroom van voertuigen. Voor de instroom aan het begin van een gesimuleerde rechte weg kan gekeken worden naar de dichtheid. De afstand tussen twee voertuigen houdt immers verband met de dichtheid. Maar wanneer voertuigen het eind van de gesimuleerde rechte weg bereiken, dan verlaten deze voertuigen de weg en hebben de overige voertuigen steeds minder voorgangers naarmate de tijd vordert. Immers, een voertuig dat zojuist op de weg is toegetreden zal een aantal voorgangers voor zich hebben. Wanneer dit voertuig op het punt staat om de weg te verlaten, heeft dit geen voertuig geen voorgangers meer. Dit is niet realistisch. Wel kunnen we een veel langere weg simuleren en slechts kijken naar een bepaald gebied, maar dan moeten we ons bezighouden met de vraag hoelang de weg dan moet zijn opdat de voertuigen in het beschouwde gebied daadwerkelijk een realistische invloed ondervinden van de voertuigen buiten het beschouwde gebied. Hier gaan we echter niet verder op in.

## 4.6 Initiële plaatsing

In de simulatie kan zowel uniform verkeer als fileverkeer gesimuleerd worden. Bij uniform verkeer worden de voertuigen initieel met onderling gelijke afstand, afhankelijk van de dichtheid, op de weg geplaatst. Bij fileverkeer wordt een gedeelte van de weg gereserveerd waarop voertuigen direct achter elkaar geplaatst worden; op het overige gedeelte van de weg worden voertuigen geplaatst met onderling gelijke afstand, afhankelijk van de dichtheid. Bij fileverkeer heeft de dichtheid dan ook betrekking op het gedeelte dat niet gereserveerd is voor de file.

## 4.7 Java Applet

Voor de implementatie van de simulatie is voor de programmeertaal Java gekozen in vorm van een Java Applet, zodat de simulatie via een website te bekijken valt. Het simulatie programma is te vinden op: <http://www.few.vu.nl/~droubos/filesimulatie/>. Daarnaast is in het document ‘Wiskundige modellen voor filevorming - Simulatie applet source code’ de broncode opgenomen, waarmee het mogelijk is om zelf de applet te compileren.

In de applet wordt de maximum snelheid opgegeven in aantal cellen per seconde, zie figuur 4.4. Herinner dat één cel overeenkomt met 5 meter. De maximum snelheid kan dus in stappen van 5 meter per seconde worden ingesteld. Ingeval de keuze voor het Intelligent Driver Model zal automatisch de maximum snelheid omgerekend worden naar meter per seconde.

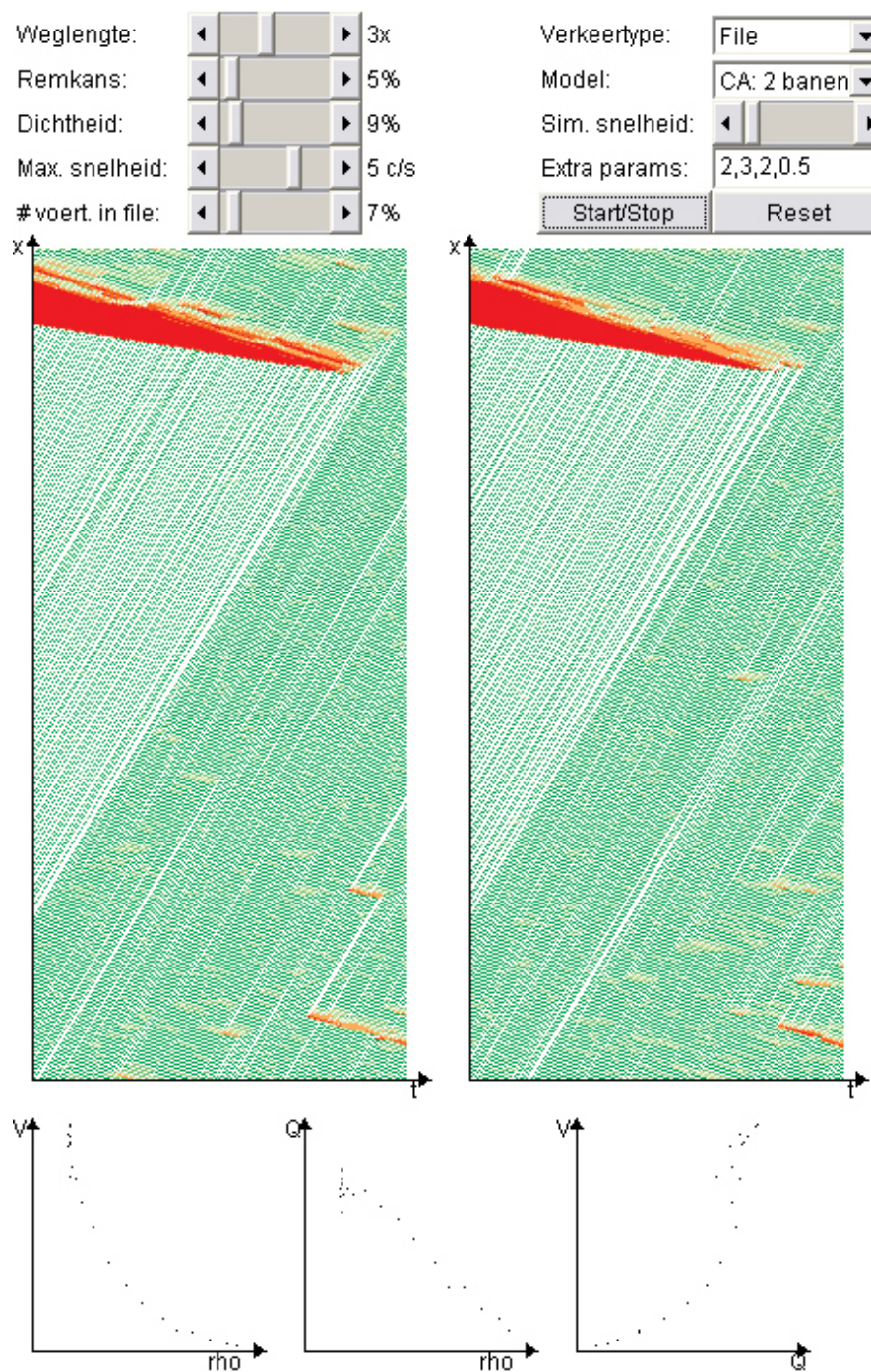
Het aantal voertuigen in de file kan ingesteld worden als een percentage van de weglengte. In figuur 4.4 is voor 7% gekozen, i.e., 7% van de weg wordt gereserveerd voor de file waarin voertuigen direct achter elkaar geplaatst worden.

Een ander punt dat aandacht verdient is het veld ‘extra params’. Hierin worden extra parameters gescheiden door een komma en alles wordt direct achter elkaar doorgetypt. Voor het cellulaire automaten model voor tweebaanswegen zijn dit respectievelijk de waarden voor  $p_w, b_1, b_2, b_3$ . Voor het Intelligent Driver Model zijn dit respectievelijk de waarden voor  $T, a, b, d_0, \delta$ .

### 4.7.1 Eigen model

Bij het eigen model zijn ook extra parameters in te voeren. De eerste twee parameters zijn  $c$  en  $\beta$  zoals die gebruikt worden in het eigen model. Daarnaast is er een derde parameter die de

waarde 0 of 1 kan aannemen. De waarde 0 correspondeert met een vaste remkans voor ieder voertuig (zoals in het oorspronkelijke cellulaire automaten model); de waarde 1 correspondeert met de variabele remkans die afhankelijk is van de afstand tot de voorganger, zoals die in het eigen model gedefiniëerd is. Door de mogelijkheid om te kiezen voor een vaste remkans, kan onderzocht worden wat de gevolgen zijn van alleen de aanpassing aan de tweede update-regel.



**Figuur 4.4.** Screenshot van de simulatie applet.



# Hoofdstuk 5

## Resultaten

In hoofdstuk 3 is aandacht besteed aan een aantal verkeersmodellen, terwijl in hoofdstuk 4 het principe van het simulatie programma behandeld is. We zullen nu aandacht besteden aan de resultaten van de simulatie en deze resultaten vergelijken met de theorie zoals die eerder aan bod is gekomen. Daarnaast zullen we ook nog enige nieuwe theorie introduceren.

### 5.1 Uniforme simulatie

We beginnen met de resultaten die voortkomen door te kiezen voor een uniforme initiële plaatsing van de voertuigen. Het observeren van files kan beter gedaan worden door te beginnen met een file, wat in de volgende sectie behandeld zal worden.

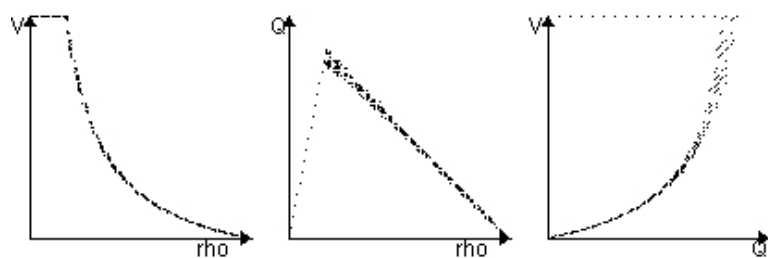
#### 5.1.1 Cellulaire automaten

Het fundamenteel diagram zoals die behoort bij het cellulaire automaten model lijkt aan de driehoeksfunctie te voldoen, zoals die in hoofdstuk 2 is behandeld (zie figuur 5.1). In die figuur is tevens één variabele gevarieerd terwijl de andere variabelen constant zijn gehouden. Hieruit kan het volgende geconcludeerd worden.

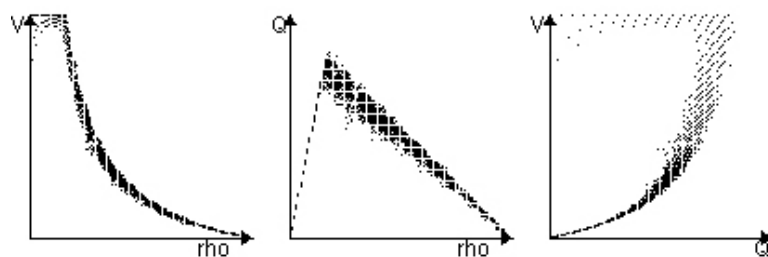
1. Naarmate de remkans toeneemt, vertonen de fundamentele diagrammen steeds meer ruis.
2. Naarmate de remkans toeneemt, zal de doorstroming van het verkeer dalen.
3. Naarmate de remkans toeneemt, wordt de kans op een filevorming groter.

Verder zien we bij een remkans van 50% dat de relatie tussen de intensiteit  $Q$  en de dichtheid  $\rho$  enigszins de vorm van een omgekeerde  $\lambda$  gaat vertonen.

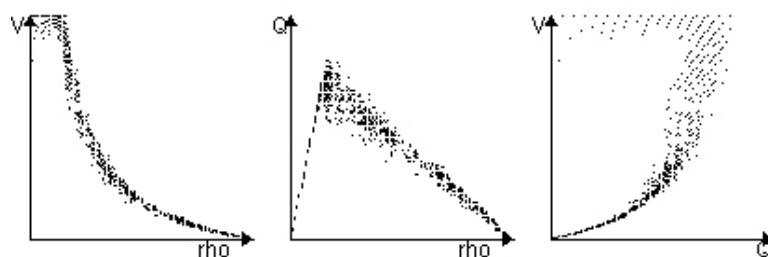
De ruis (i.e., waarnemingen die niet in lijn met de evenwichtstoestand vallen) die onstaat naar aanleiding van de remkans (punt 1) valt te verklaren aan de hand van stationariteit. Ingeval er sprake is van een positieve remkans ( $p > 0$ ) zal het verkeer zich niet in de stationaire toestand bevinden.



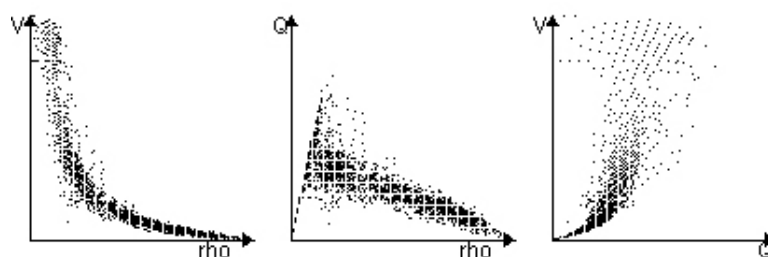
(a) Remkans: 0%.



(b) Remkans: 5%.



(c) Remkans: 10%.



(d) Remkans: 50%.

**Figuur 5.1.** Fundamentele diagrammen bij het cellulaire automaten model, met max. snelheid: 5 c/s; weglengte: 1x; verkeertype: uniform.

In het fundamentele diagram die de relatie toont tussen de intensiteit  $Q$  en de dichtheid  $\rho$  blijkt dat de top van de grafiek steeds lager komt te liggen naarmate de remkans toeneemt (punt 2). Daar de intensiteit een maat is voor de doorstroming, daalt de doorstroming van verkeer naarmate de remkans toeneemt.

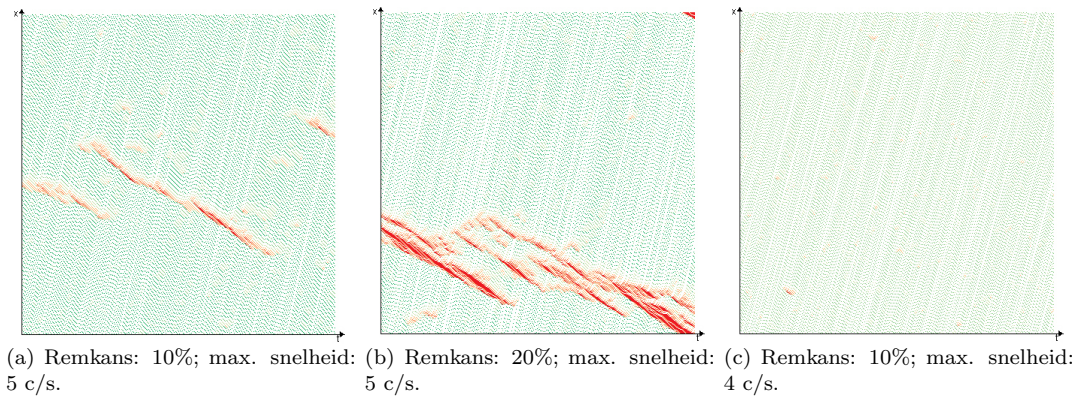
We kunnen uit de relatie tussen de snelheid  $V$  en de dichtheid  $\rho$  afleiden wat het gevolg is van een toenemende remkans. Te zien valt in figuur 5.1 dat de snelheid als functie van de dichtheid voor kleine waarden van  $\rho$  veel sneller daalt naarmate de remkans toeneemt. Anders omschreven houdt dit in dat er een positief verband bestaat tussen de remkans en de kans op filevorming.

Het is nu dan ook duidelijk wat de invloed is van de remkans op filevorming. Laten we nu eens kijken naar de invloed van de maximum snelheid. Uit figuur 5.3 blijkt het volgende.

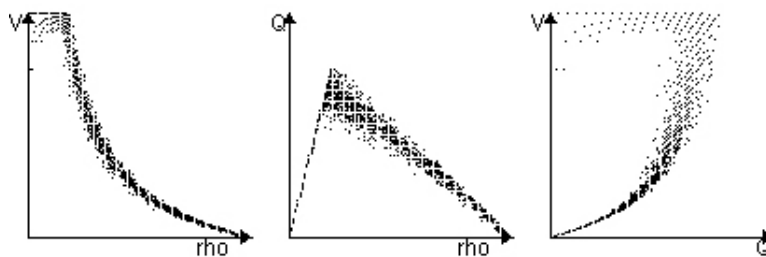
1. Naarmate de maximum snelheid toeneemt, vindt de faseovergang van free flow naar congestie plaats bij een kleinere dichtheid.
2. Naarmate de maximum snelheid toeneemt, zal de doorstroming van het verkeer stijgen.
3. Naarmate de maximum snelheid toeneemt, wordt de kans op een filevorming groter.

Alhoewel een hogere maximum snelheid eerder filevorming tot gevolg heeft, blijkt echter dat het voor de doorstroming van het verkeer wel bevorderlijk is.

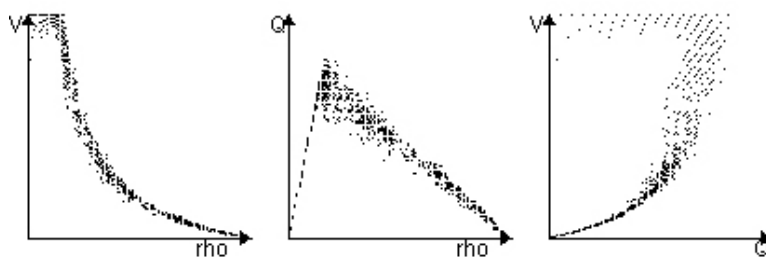
De voorgaande resultaten over de kans op filevorming kunnen we ook bestuderen aan de hand van het plaats-tijd-diagram. Figuur 5.2 geeft het verloop van de plaats  $x$  van voertuigen weer als functie van de tijd  $t$ . We zien hierin dat een file zich naar achteren verplaatst, hetgeen al eerder behandeld is in het theoretische gedeelte van dit werkstuk. In figuur 5.2(a) lost de file zich op, terwijl daar niet echt sprake van is in figuur 5.2(b) waar de remkans dan ook twee keer zo groot gekozen is. Er is daar sprake van hevige filevorming en bovendien zien we hier een nieuw verschijnsel dat *stop and go waves* genoemd wordt. Dit is het verschijnsel dat een voertuig in de file staat, waarna deze uit de file vertrekt en even later weer opnieuw in een nieuwe file terecht komt. Zulke stop and go waves zijn goed zichtbaar in figuur 5.2(b). Dat de maximum snelheid ook van invloed is op de kans op filevorming blijkt ook wel uit het plaats-tijd-diagram zoals die afgebeeld staat in figuur 5.2(c) waar nauwelijks sprake is van filevorming.



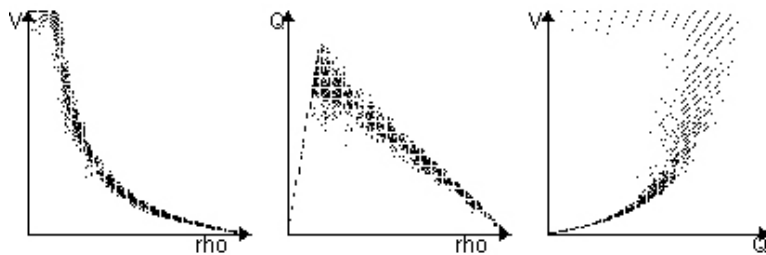
**Figuur 5.2.** Fundamentele diagrammen bij het cellulaire automaten model, met dichtheid: 15%; weg-lengte: 1x; verkeertype: uniform.



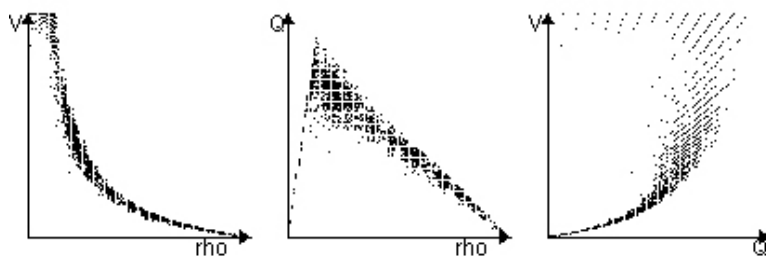
(a) Max. snelheid: 4 c/s.



(b) Max. snelheid: 5 c/s.



(c) Max. snelheid: 6 c/s.



(d) Max. snelheid: 7 c/s.

**Figuur 5.3.** Fundamentele diagrammen bij het cellulaire automaten model, met remkans: 10%; weglengte: 1x; verkeertype: uniform.

**Theoretisch fundamenteel diagram cellulaire automaten model**

Uit de simulatie is gebleken dat het fundamenteel diagram behorende bij het cellulaire automaten model te beschrijven valt met de driehoeksfunctie. Dit is echter ook analytisch af te leiden uit het model en dat zullen we hieronder dan ook zelf doen. We herhalen het cellulaire automaten model voor éénbaanswegen.

1. Voertuig  $\alpha$  verhoogt zijn snelheid met 1 eenheid, mits  $v_\alpha < v_{max}$ .
2. Voertuig  $\alpha$  verlaagt zijn snelheid tot  $\min(v_\alpha, d_\alpha)$ .
3. Met kans  $p$  verlaagt voertuig  $\alpha$  zijn snelheid met 1 eenheid tot  $\max(v_\alpha - 1, 0)$ .
4. Voertuig  $\alpha$  gaat van  $x_\alpha$  naar  $x_\alpha + v_\alpha$ .

We zijn nu geïnteresseerd in de situatie waarin het verkeer stationair is en laten daartoe  $p = 0$ . Het samennemen van het eerste en tweede punt resulteert in:

$$v_\alpha = \min(v_\alpha + 1, v_{max}, d_\alpha).$$

Het is echter handiger om  $d_\alpha$  te schrijven als  $h_\alpha - 1$ , waarbij  $h_\alpha$  de afstand is tussen de eigen achterbumper en de achterbumper van de voorganger. Bovendien impliceert stationariteit van het verkeer dat  $v_\alpha = v$  voor alle  $\alpha$ . Dus gaat bovenstaande formule over in:

$$v = \min(v_{max}, h_\alpha - 1).$$

We kunnen nu drie situaties onderscheiden. De eerste situatie is waar  $h_\alpha - 1 > v_{max}$ , waarbij dan alle voertuigen met de constante snelheid  $v_{max}$  rijden. De tweede situatie is waar  $h_\alpha - 1 = v_{max}$ , waarbij alle voertuigen eveneens  $v_{max}$  rijden, maar dit tevens gelijk is aan  $h_\alpha - 1$ . De derde situatie is waar  $h_\alpha - 1 < v_{max}$ , waarbij alle voertuigen rijden met een snelheid gelijk aan  $h_\alpha - 1$ . Vanwege de stationariteit, waarbij  $v$  voor ieder voertuig gelijk is, zal ingeval van situatie 2 en 3 tevens  $h_\alpha - 1$  (en dan ook  $h_\alpha$ ) voor ieder voertuig gelijk moeten zijn.

We gaan proberen om  $Q$  als functie van  $\rho$  te schrijven. Daartoe brengen we eerst  $\rho$  in verband met  $h_\alpha$ . Ingeval van situatie 3 is het duidelijk dat:

$$\rho = \frac{1}{h_\alpha} \Leftrightarrow h_\alpha = \frac{1}{\rho}.$$

In situatie 3 geldt dat  $v = h_\alpha - 1 = \frac{1}{\rho} - 1$ . Met behulp van de fundamentele vergelijking vinden we nu:

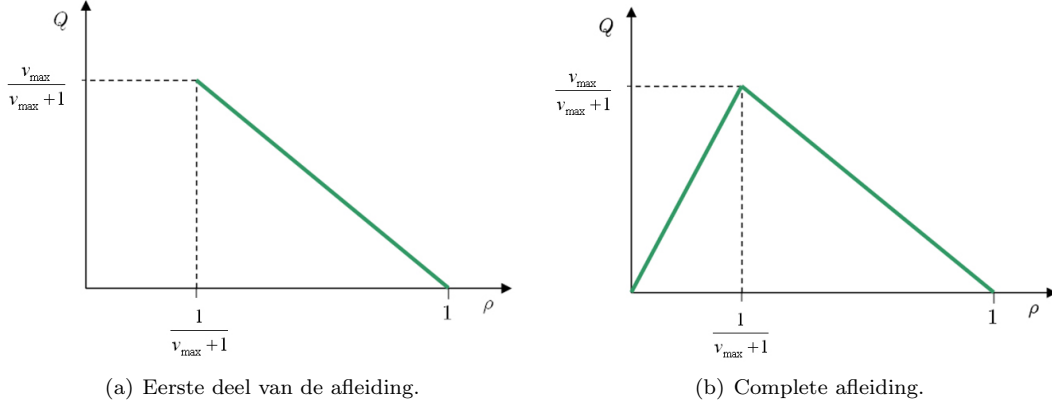
$$Q = \rho v = \rho \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) = 1 - \rho,$$

wat dus een lineair dalende functie is. Deze dalende functie geldt slechts voor de gevallen waar  $h_\alpha - 1 < v_{max}$ . Met de substitutie van de uitdrukking voor  $h_\alpha$  volgt:

$$h_\alpha - 1 < v_{max} \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} - 1 < v_{max} \Leftrightarrow \rho > \frac{1}{v_{max} + 1}.$$

Uit situatie 2 volgt nu dan ook dat

$$Q = 1 - \frac{1}{v_{max} + 1} = \frac{v_{max}}{v_{max} + 1} \text{ als } \rho = \frac{1}{v_{max} + 1}.$$



**Figuur 5.4.** Afgeleid fundamenteel diagram.

Figuur 5.4(a) toont hetgeen we tot nu toe afgeleid hebben.

Situatie 1 geldt nu ingeval  $\rho < \frac{1}{v_{max} + 1}$ . Voor  $\rho \in [0, 1/(v_{max} + 1)]$  geldt dat  $v = v_{max}$ , zodat het meteen duidelijk is dat  $Q$  een lineair stijgende functie is voor  $\rho \in [0, 1/(v_{max} + 1)]$ . Immers:

$$Q = \rho v = \rho v_{max}.$$

Wanneer  $\rho = 1/(v_{max} + 1)$  volgt dat  $Q = 1/(v_{max} + 1) \cdot v_{max} = v_{max}/(v_{max} + 1)$  en dat is uiteraard hetzelfde punt als we al eerder gevonden hebben ingeval van situatie 2. Figuur 5.4(b) toont het fundamenteel diagram van de complete afleiding.

Om het resultaat van onze afleiding samen te vatten, staat hieronder de functie  $Q(\rho)$  gegeven door:

$$Q(\rho) = \begin{cases} \rho v_{max} & \text{als } \rho \leq 1/(v_{max} + 1), \\ 1 - \rho & \text{als } \rho \geq 1/(v_{max} + 1). \end{cases}$$

Voor de doorstroming van het verkeer is het dus bevorderlijk als de maximum snelheid zo groot mogelijk gekozen wordt:

$$\lim_{\rho \downarrow 0} Q(\rho) = 1 \text{ door } v_{max} \rightarrow \infty.$$

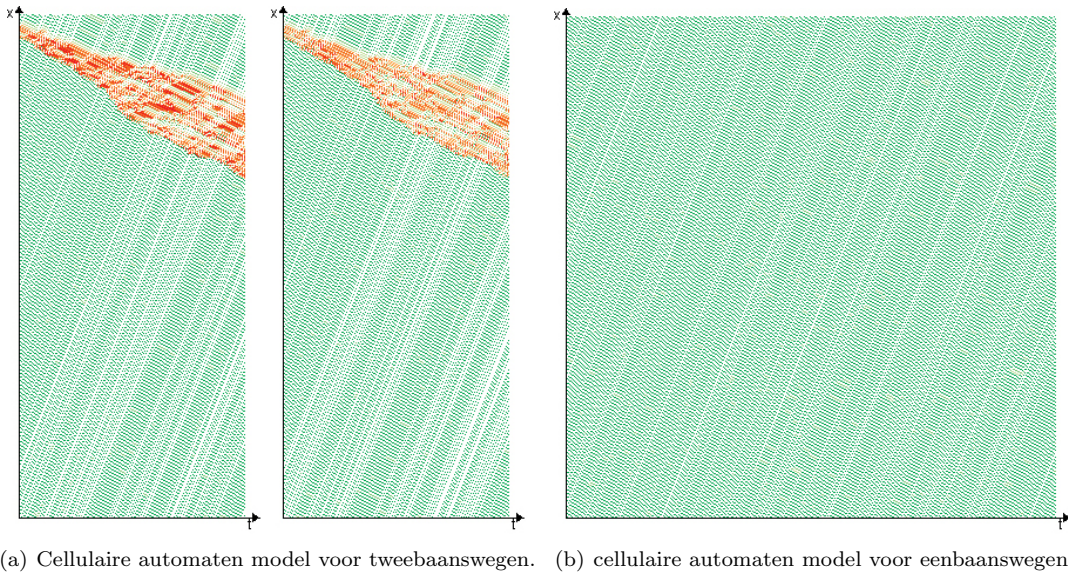
Echter, er ontstaat dan wel veel sneller een file, aangezien  $\rho_c = 1/(v_{max} + 1)$  steeds kleiner wordt naarmate de maximum snelheid omhoog gaat. Maar, wanneer  $\rho > \rho_c$  geldt dat  $Q = 1 - \rho$  voor iedere waarde van  $v_{max}$  en dus concluderen we het volgende met  $Q_m$  en  $Q_n$  de intensiteit bij maximum snelheid  $m$  respectievelijk  $n$ :

$$Q_m(\rho) \geq Q_n(\rho) \quad [m > n; \forall \rho \in [0, 1]].$$

Merk op dat de gevonden resultaten uit de simulatie overeenkomen met deze theoretische afleiding van het fundamenteel diagram. Echter, in de werkelijkheid zal het verkeer verre van stationair zijn.

### 5.1.2 Cellulaire automaten model voor tweebaanswegen

Het cellulaire automaten model voor tweebaanswegen heeft een aantal extra parameters ten opzichte van het cellulaire automaten model voor eenbaanswegen die betrekking hebben op het model om van rijbaan te verwisselen. De keuze van de parameters zal dusdanig van invloed zijn op de ontwikkeling van het verkeer. Al ingeval van een hele kleine remkans (1%) kan vreemd rijgedrag de oorzaak zijn van het ontstaan van een file. In figuur 5.5 is weergegeven wat er gebeurd als voertuigen met kans 1 van baan verwisselen zodra de afstand tot zijn voorganger minder bedraagt dan 4 cellen en wanneer op de andere baan slechts beperkte ruimte gewenst is om in te voegen (één cel vrij tussen de voorganger en achterligger op de andere baan).



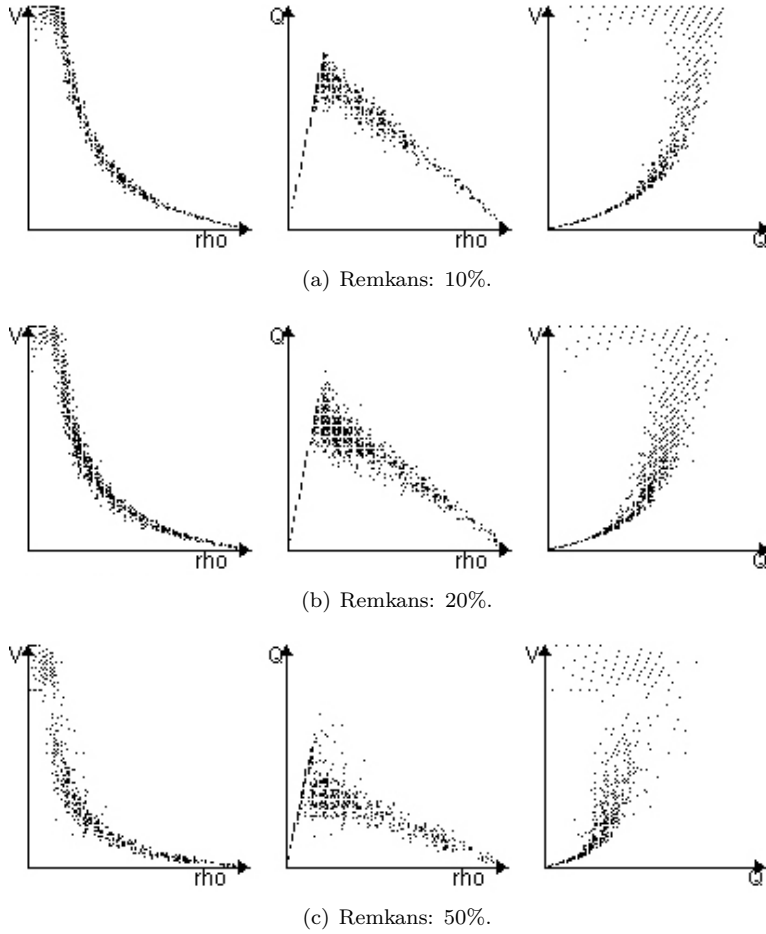
**Figuur 5.5.** Vreemd rijgedrag leidt tot het ontstaan van een file, met: weglengte  $2x$ ; remkans 1%; dichtheid: 15%; max snelheid: 5 c/s; verkeerstype: uniform;  $p_w = 1$ ;  $b_1 = 4$ ;  $b_2 = b_3 = 1$ .

Dit is echter niet een situatie wat in de realiteit veel zal voorkomen. Immers, een voertuig dat graag 4 cellen tussen zijn voorganger wil hebben, verplaatst zich niet naar de andere rijbaan om daar dicht achter een ander voertuig te gaan rijden. De filevorming ontstaat nu naar aanleiding van het verplaatsen naar de andere rijbaan zonder echt rekening te houden met de achterligger op de andere baan. Deze achterligger vindt dan ineens een voertuig op een afstand van ten minste 1 cel voor hem, wat resulteert in het moeten remmen. Daar de twee rijbanen van elkaar afhankelijk zijn door een positieve kans ( $p_w > 0$ ) om van baan te verwisselen, zal er een file ontstaan op beide rijbanen, zoals ook te zien is in figuur 5.5(a).

Voor de verdere analyse van het cellulaire automaten model voor tweebaanswegen zullen we meer realistische waarden voor de parameters  $b_w, b_1, b_2$  en  $b_3$  kiezen.

Met  $b_w = 0.5$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 3$ ,  $b_3 = 2$  wordt een situatie gesimuleerd die meer realistisch is; wanneer een voertuig minder dan twee lege cellen voor zich treft, zal het met kans 50% van baan verwisselen mits het voertuig op de andere baan dan ten minste drie lege cellen voor zich treft (anders heeft het wisselen van baan geen zin) en er voldoende ruimte is voor de achterligger op de andere baan.

In figuur 5.6 staan de fundamentele diagrammen voor verschillende waarden van de remkans  $p$ .

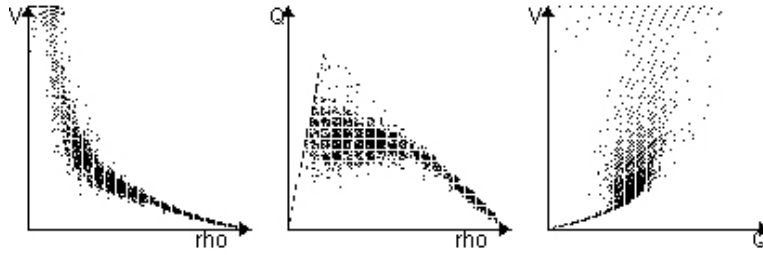


**Figuur 5.6.** Fundamentele diagrammen bij het cellulaire automaten model voor tweebaanswegen, met: max. snelheid: 5 c/s; weglengte: 1x; verkeertype: uniform;  $p_w = 0.5$ ;  $b_1 = b_3 = 2$ ;  $b_2 = 3$ .

We concluderen hier hetzelfde als bij het cellulaire automaten model voor eenbaanswegen. Voor normaal rijgedrag zoals dat gesimuleerd is bij het maken van figuur 5.6 geeft het cellulaire automaten model voor tweebaanswegen een zelfde soort fundamenteel diagram. Het blijkt dus voor de doorstroming van het verkeer per rijbaan niet (of nauwelijks) uit te maken of voertuigen van baan kunnen verwisselen. Daarom zou het voor de totale doorstroming van het verkeer bevorderlijk zijn om meer rijbanen aan te leggen. Het verwisselen van baan heeft immers kennelijk weinig invloed op filevorming.

Als we echter nogmaals kijken wat er gebeurt als voertuigen vreemd gedrag vertonen, dan blijkt de doorstroming van het verkeer lager te liggen dan bij normaal gedrag. Vergelijk daartoe figuur 5.7 met figuur 5.6(a).

De doorstroming van het verkeer is dus erg afhankelijk van vreemd rijgedrag. Houden voertuigen rekening met elkaar dan heeft het verwisselen van rijbaan nauwelijks tot geen invloed op filevorming en de doorstroming van het verkeer, maar zodra voertuigen geen rekening houden met elkaar komt de doorstroming van het verkeer in het gedrang. In de realiteit laat vreemd



**Figuur 5.7.** Fundamenteel diagram bij vreemd rijgedrag.

rijgedrag zich karakteriseren door asociaal rijgedrag waarbij voertuigen extreem veel van rijbaan wisselen om er alleen zelf beter van te worden.

Ook zullen we een vergelijking maken tussen de invloed van de maximum snelheid op de doorstroming en de kans op het ontstaan van files bij het cellulaire automaten model voor tweebaanswegen met het eenbaans model. Uit figuur 5.8 blijkt dat er nauwelijks verschil te ontdekken is tussen het eenbaans- en tweebaansmodel. Vergelijk daartoe figuur 5.8 met figuur 5.3.

### 5.1.3 Intelligent Driver Model

Het Intelligent Driver Model heeft een soortgelijk fundamenteel diagram. Ook hier lijkt de driehoeksfunctie voor het fundamenteel diagram te voldoen, zie figuur 5.9.

We kunnen, evenals bij het cellulaire automaten model, concluderen dat de maximum snelheid van invloed is op het punt ( $\rho_c$ ) waarbij het verkeer van de free flow fase naar de congestie fase overgaat.

Het fundamenteel diagram waarin het verband tussen de intensiteit en de dichtheid getoond wordt, heeft duidelijk de vorm van een omgekeerde lambda. In hoofdstuk 2 is al behandeld dat de intensiteit  $Q$  meerdere waarden kan aannemen bij eenzelfde dichtheid  $\rho$ ; voordat er sprake is van congestie kan de intensiteit hoger liggen dan de intensiteit in de congestie fase bij eenzelfde dichtheid.

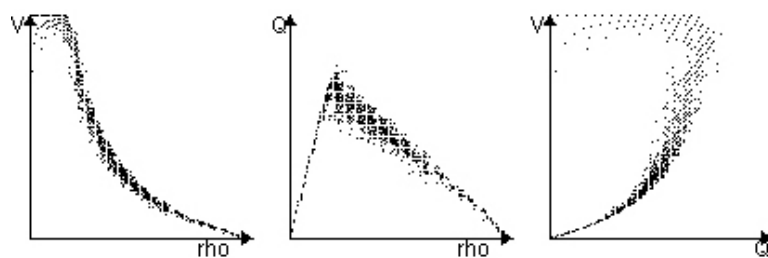
In [4] vinden we het klassieke diagram tussen de intensiteit en de dichtheid. Dit diagram is weergegeven in figuur 5.10.

Het fundamenteel diagram zoals die komt uit de simulatie komt goed overeen met dit klassieke diagram. Door tijdens de simulatie te kijken naar het plaats-tijd-diagram en het fundamenteel diagram zien we inderdaad dat er eerst punten getekend worden volgens de bovenste pijl in figuur 5.10 in de fase waarbij er net een file optreedt en later punten getekend worden volgens de onderste pijl in figuur 5.10 in de herstelfase, de fase waarbij de file zich oplost.

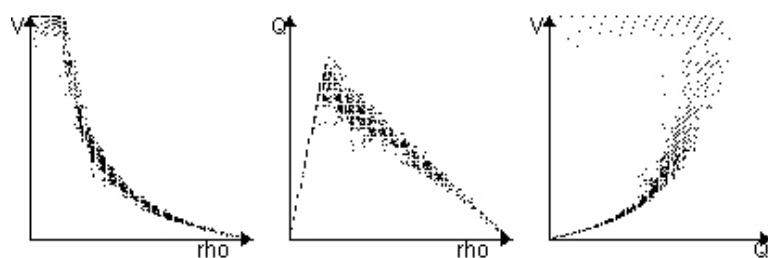
Het plaats-tijd-diagram in figuur 5.11 van het Intelligent Driver Model laat zien hoe een file ontstaat.

### 5.1.4 Eigen model

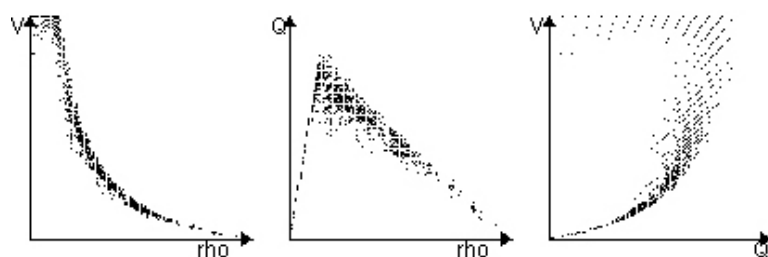
Dit model is zodanig opgesteld dat rekening gehouden wordt met de twee voorgangers van een voertuig, wat gevolgen heeft voor de ontwikkeling van een file. Om dat visueel weer te geven,



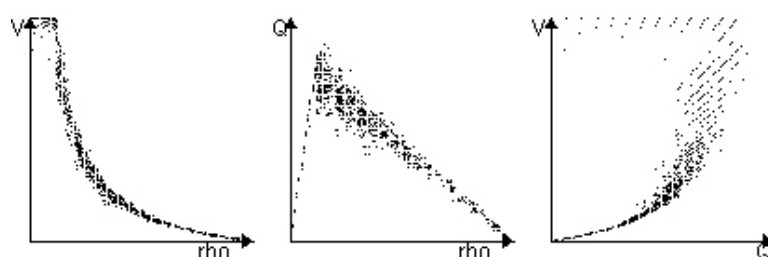
(a) Max. snelheid: 4 c/s.



(b) Max. snelheid: 5 c/s.

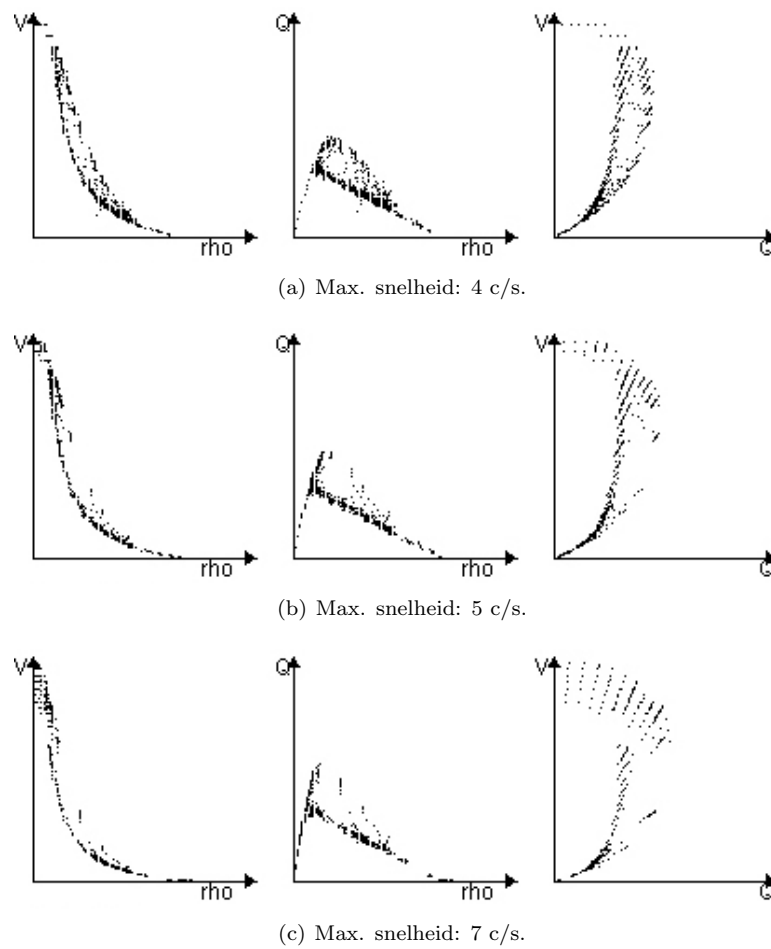


(c) Max. snelheid: 6 c/s.

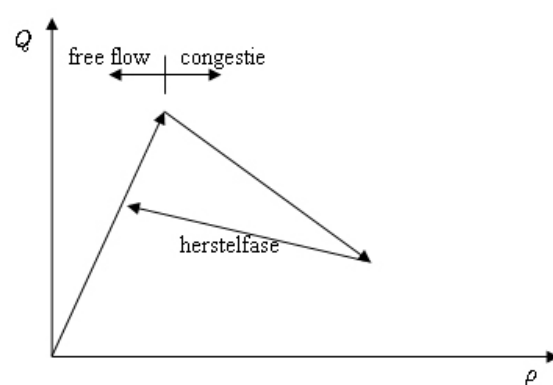


(d) Max. snelheid: 7 c/s.

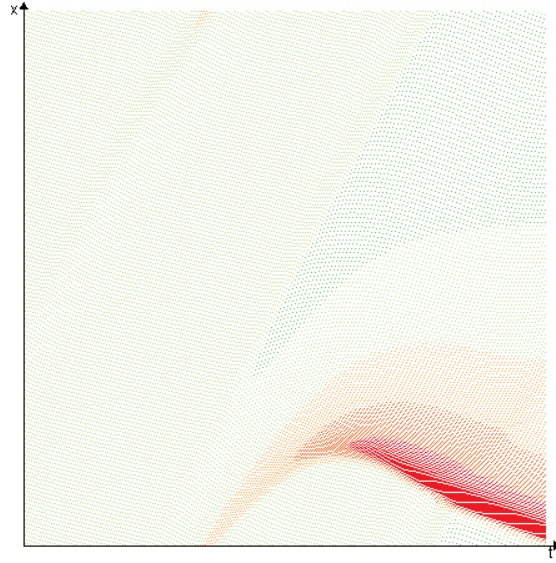
**Figuur 5.8.** Fundamentele diagrammen bij het cellulaire automaten model voor tweebaanswegen, met remkans: 10%; weglengte: 1x; verkeertype: uniform;  $b_w = 1$ ;  $b_1 = b_3 = 2$ ;  $b_2 = 3$ .



**Figuur 5.9.** Fundamentele diagrammen bij Intelligent Driver Model, met weglengte:  $6x$ ;  $T = 1.5$ ;  $a = 0.3$ ;  $b = 3.0$ ;  $d_0 = 2.0$ ;  $\delta = 4.0$ ; verkeertype: uniform.



**Figuur 5.10.** Klassieke intensiteit-dichtheid diagram.



**Figuur 5.11.** Plaats-tijd-diagram bij Intelligent Driver Model, met weglengte: 6x; max. snelheid: 5 c/s; dichtheid: 13%;  $T = 1.5$ ;  $a = 0.3$ ;  $b = 3.0$ ;  $d_0 = 2.0$ ;  $\delta = 4.0$ ; verkeertype: uniform.

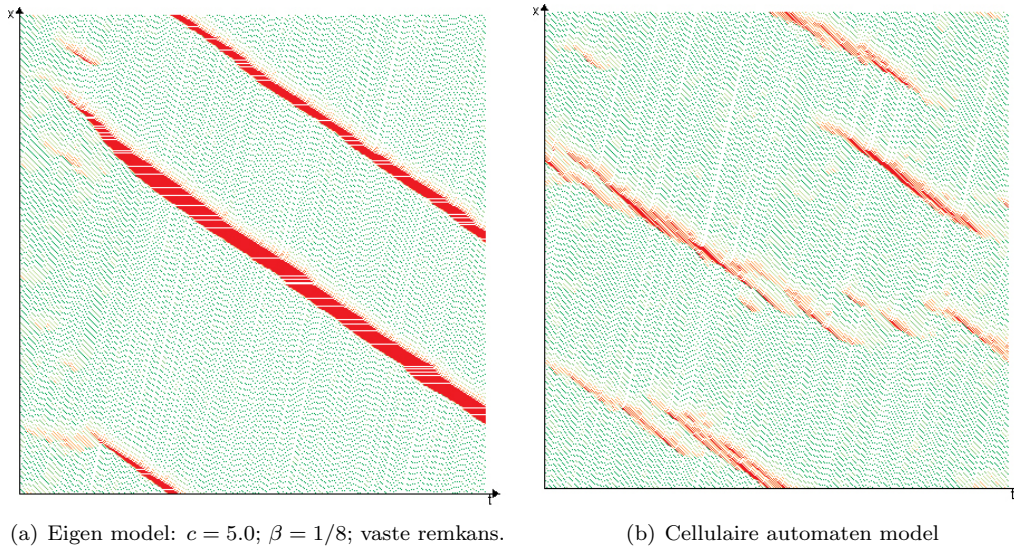
is een vergelijking gemaakt tussen het oorspronkelijke cellulaire automaten model en het eigen model.

In figuur 5.12 is voor beide modellen gekozen voor een vaste remkans van 10% en voor een dichtheid van 17%. In beide modellen is er sprake van filevorming, maar toch verschillen de beide modellen van elkaar. In het oorspronkelijke cellulaire automaten model zien we weliswaar een file, maar deze is niet zo geconcentreerd als ingeval van het eigen model. Daar is immers een duidelijke band te zien waarin de voertuigen een snelheid gelijk aan 0 hebben. Doordat de parameters in het eigen model zodanig gekozen zijn dat er meer afstand wordt bewaard bij kleine waarden van  $d_\alpha$  en  $d_{\alpha-1}$  dan ingeval van het oorspronkelijke cellulaire automaten model, kan geconcludeerd worden dat het beter is om op een veilige afstand, zo dicht mogelijk achter de voorganger te gaan rijden.

Als we  $c = 5.0$  en  $b = 0.5$  nemen, dan simuleren we eigenlijk verkeer dat van doorrijden houdt. Immers, vergelijk het model met  $b = 0.125$  en  $c = 5.0$  eens met het model waarin  $b = 0.5$  en  $c = 5.0$ . De simulatie laat dan zien dat de file een stuk kleiner is (de horizontale afstand van het rode gebied) en dat deze zich tevens sneller naar achteren verplaatst. Dit blijkt uit figuur 5.13.

## 5.2 File simulatie

In de vorige sectie werd ervan uitgegaan dat de voertuigen op gelijke afstand van elkaar op de weg begonnen. In deze sectie zal begonnen worden met een file om zo een file beter te kunnen bestuderen.



**Figuur 5.12.** Plaats-tijd-diagrammen, met remkans: 10%; dichtheid: 17%; max. snelheid: 5 c/s; weglengte: 1x; verkeertype: uniform.

### 5.2.1 Cellulaire automaten

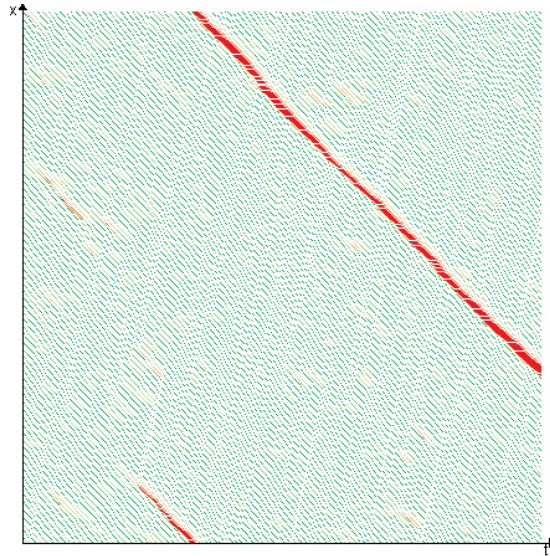
Zowel bij het model voor eenbaanswegen als tweebaanswegen bepaalt de remkans de manier waarop een file zich oplost. Ingeval de remkans 0% bedraagt, zien we de voertuigen aan de kop van file mooi versnellen en de file verlaten. De file wordt keurig smaller en er ontstaan geen nieuwe files nadat de voertuigen zojuist de file verlaten hebben. Zie figuur 5.14(a) en figuur 5.15(a).

Zodra er een kleine remkans is van 10% blijkt stroomafwaarts nieuwe kleine files te ontstaan. Ingeval van het model voor tweebaanswegen lijkt dit erger te zijn. Dit wordt met name verklaard doordat voertuigen de mogelijkheid hebben om van rijbaan te verwisselen. Vergelijk daartoe figuur 5.14(b) met figuur 5.15(b).

In beide situaties verplaatst de file zich naar achteren. Niet alleen de remkans heeft invloed op de manier waarop een file zich oplost; ook de maximum snelheid speelt een belangrijke rol. Bij een hogere maximum snelheid zal een file zich minder snel oplossen dan bij een lagere maximum snelheid.

Merk op dat we het percentage van het aantal voertuigen in de file naar beneden hebben gebracht bij een verhoogde remkans. Bij eenzelfde percentage aan voertuigen in de file zouden de voertuigen in de file dan de volgende ronde zelf weer aansluiten bij dezelfde file, waardoor de file zich niet zou oplossen. Het is onrealistisch om dit zo te simuleren, aangezien een weg in de realiteit helemaal niet rond is. Daarom is ervoor gekozen om de grootte van de file zodanig te kiezen dat de voertuigen die de file verlaten niet nogmaals in dezelfde file terecht kunnen komen. Met dit wetende kan nu ook geconcludeerd worden dat de remkans er niet alleen voor zorgt dat er stroomafwaarts nieuwe kleine files ontstaan, maar ook dat het langer duurt voordat een file opgelost is.

De manier van simuleren biedt daarnaast nog een ander voordeel. Er wordt op deze manier een weg gesimuleerd waarvan een gebied  $A$  een dichtheid heeft van 7% (vrij verkeer), een gebied  $C$



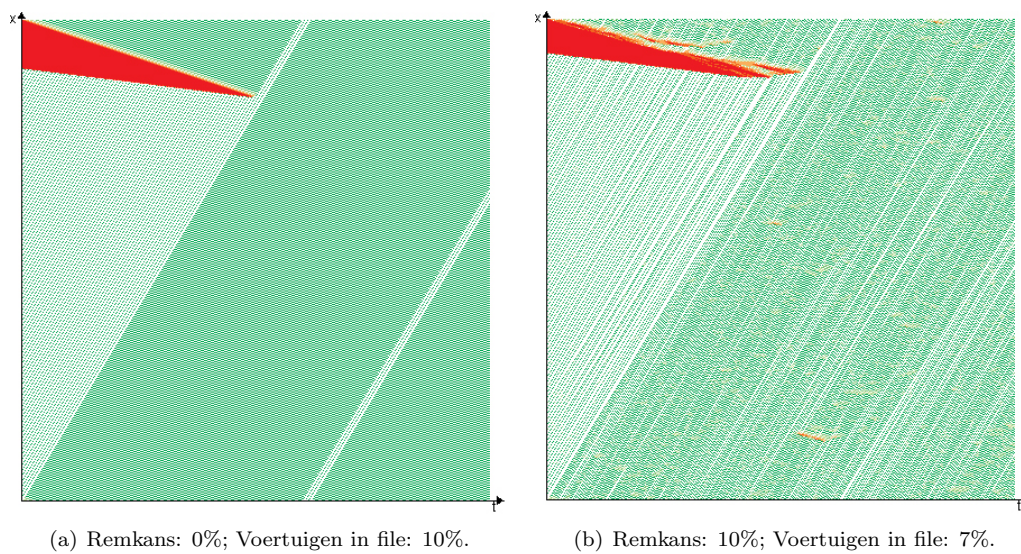
**Figuur 5.13.** Plaats-tijd-diagram bij het eigen model, met vaste remkans: 10%; dichtheid: 17%; max. snelheid: 5 c/s; weglengte: 1x; verkeertype: uniform;  $c = 5.0$ ;  $\beta = 1/8$ .

een dichtheid heeft van 100% (file) en een gebied  $B$  (eveneens vrij verkeer) een dichtheid heeft die tussen het gebied van  $A$  en  $C$  in ligt. Dat is namelijk het gebied waarin zich voertuigen uit gebied  $A$  en  $C$  bevinden nadat de voertuigen de file verlaten hebben. Dat gebied  $B$  een dichtheid heeft dat hoort bij de free flow fase komt voort uit de simulatie. We kunnen immers zien, nadat de file opgelost is, dat de snelheid van het verkeer gewoon maximaal is (de groene kleur van de pixels).

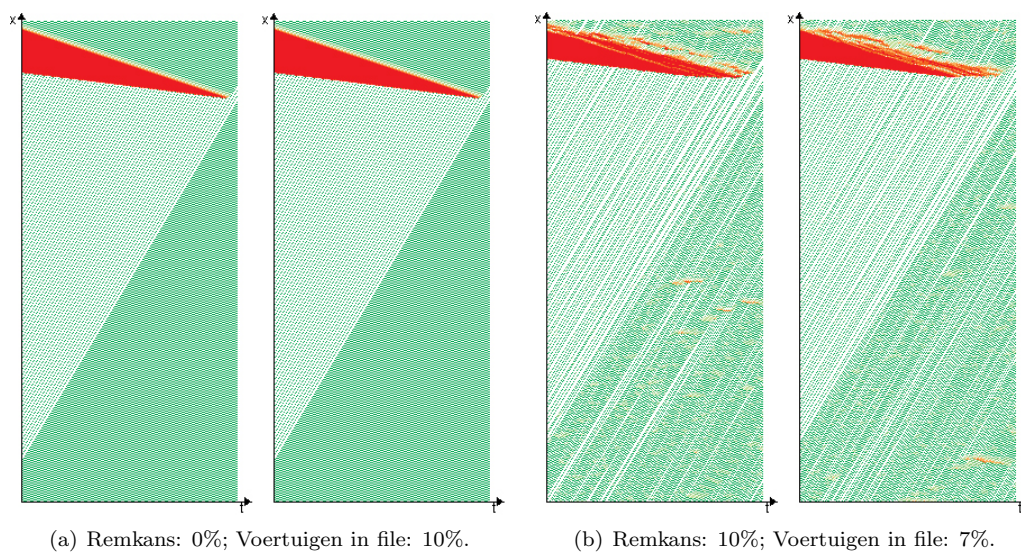
In [6] lezen we hoe een front tussen twee verschillende gebieden zich ontwikkelt in de tijd bij het LWR model (zie hoofdstuk 3 voor dit model). We beschouwen in ons geval nu het fundamenteel diagram zoals in figuur 5.16, de blauwe lijn. In het figuur is tevens de dichtheid van gebied  $A$ ,  $B$  en  $C$  aangegeven.

Bij het LWR model is het nu zo dat de beweging van het golffront tussen de gebieden met verschillende dichtheden afgeleid kan worden uit het fundamenteel diagram. Zo beweegt het golffront tussen gebieden  $A$  en  $C$  (daar waar achteropkomende verkeer de file treft) parallel aan de lijn die de punten  $A$  en  $C$  verbindt in het fundamenteel diagram. Het golffront tussen de gebieden  $C$  en  $B$  zal zich dan bewegen parallel aan de lijn die punt  $C$  met punt  $B$  verbindt. Het golffront  $BC$  verplaatst zich sneller naar achteren dan het golffront  $AC$  en dus zien we de file zich naar achteren verplaatsen terwijl het driehoekige gebied van de file steeds smaller wordt.

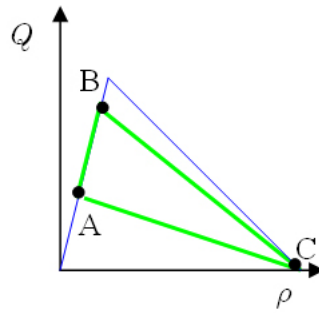
Terwijl de simulatie gebaseerd is op het cellulaire automaten model, lijkt de manier waarop de file zich oplost in de simulatie, zie de figuren 5.14, 5.15, geheel te voldoen aan de ontwikkeling die voorkomt uit het LWR model. Merk op dat het gaat om twee heel verschillende modellen: het cellulaire automaten model is een microscopisch model terwijl het LWR model een macroscopisch model is.



**Figuur 5.14.** plaats-tijd-diagram bij cellulaire automaten model, met weglengte: 3x; dichtheid: 7%; max. snelheid: 5 c/s; verkeertype: file.



**Figuur 5.15.** plaats-tijd-diagram bij cellulaire automaten model voor tweebaanswegen, met weglengte: 3x; dichtheid: 7%; max. snelheid: 5 c/s; verkeertype: file.



**Figuur 5.16.** Fundamenteel diagram.

### 5.2.2 Eigen model

Als  $c = 0$  gekozen wordt, dan gaat het eigen model over in het oorspronkelijke cellulaire automaten model, met het verschil dat we wel met een variabele remkans te maken hebben. De simulatie toont dat de manier waarop een file zich oplost, erg afhankelijk is van de remkans. Ingeval van het oorspronkelijke cellulaire automaten model met constante remkans van 20% blijkt stroomafwaarts nieuwe kleine files te ontstaan. Ingeval van het eigen model met  $c = 0$  en  $p_0 = 80\%$  blijkt dit niet het geval te zijn. De verklaring hiervan kan liggen in het feit dat het verkeer aan de kop van de file rustiger de file verlaat dan ingeval van het oorspronkelijke model. Immers, wanneer het aantal cellen tot de voorganger gelijk is aan twee, is de remkans alsnog 40%, wat relatief hoog is.

## Hoofdstuk 6

# Conclusie

De modellen om het verkeer mee te beschrijven zijn onder te verdelen in microscopische, macroscopische en mesoscopische modellen. Vooral is er aandacht besteed aan de microscopische modellen waaronder zogenaamde follow-the-leader modellen en het cellulaire automaten model. Een paar modellen van macroscopische aard zijn besproken. Daarnaast is er een model besproken op basis van de theorie van wachtrijen, waarbij als het ware een service centrum gemodelleerd werd waarbij de voertuigen werden geholpen. Hierbij is aangetoond hoe de relatie tussen de snelheid en de dichtheid eruit ziet voor verschillende parameterwaarden.

Naast een bespreking van de al bestaande modellen, is er ook aandacht besteed aan een eigen ontwikkeld model. Dit model is een aanpassing van het oorspronkelijke cellulaire automaten model. Het eigen model houdt rekening met een variabele remkans die afhangt van de afstand tot de voorganger en houdt tevens rekening met de afstand tussen de voorgangers en diens voorganger. Dit benadert het beste hoe bestuurders dagelijks aan het verkeer deelnemen.

Aan de hand van simulaties van diverse modellen en het eigen model zijn een aantal zaken opgevallen als het gaat om de kans op filevorming. Zo blijkt de remkans een hele grote factor te zijn voor het ontstaan van files. Verder blijkt dat asociaal rijgedrag waarbij baanverplaatsingen plaatsvinden zonder rekening te houden met het achteropkomend verkeer in de andere baan, leidt tot het ontstaan van files. Ook de maximum snelheid lijkt een belangrijke factor te zijn voor het ontstaan van files; hoe hoger de maximum snelheid des te sneller er sprake is van filevorming; de faseovergang van free flow naar congestie treedt al bij een kleinere dichtheid op. Echter, een hogere maximum snelheid heeft wel positieve gevolgen voor de doorstroming van het verkeer. De simulatieresultaten van het eigen model leiden tot de conclusie dat de filevorming vermindert als bestuurders op een veilige afstand zo dicht mogelijk op elkaar rijden. Dus niet meer afstand houden dan echt nodig is, helpt de files te reduceren en bevordert de doorstroming van het verkeer.

Verwant aan filevorming is natuurlijk de doorstroming van het verkeer. Bij een grotere remkans hoort een lagere doorstroming van het verkeer. Bovendien zorgt asociaal rijgedrag, zoals bedoeld als hierboven, voor een mindere doorstroming van het verkeer. Echter, wanneer bestuurders rekening houden met het achterliggende verkeer op de andere baan, dan leidt dit niet of nauwelijks tot een verminderde doorstroming per rijbaan, wat dus betekent dat het voor de totale doorstroming beter is om meer rijbanen aan te leggen.

Zodra er eenmaal een file staat, spelen een aantal factoren een rol in de snelheid waarmee de file zich oplost. Een belangrijke factor, zo is gebleken, is de maximum snelheid. Hoe hoger de

maximum snelheid, des te langzamer zal een file zich oplossen. Maar ook de remkans speelt in deze weer een factor. Bij een grotere remkans treden er, stroomafwaarts, meer nieuwe (kleine) files op, zogenaamde stop and go waves. Dit fenomeen is erger bij tweebaanswegen, omdat bestuurders de mogelijkheid hebben om van rijbaan te verwisselen.

Een belangrijk diagram in de verkeerskunde is het fundamenteel diagram en de vergelijking die een relatie tussen de grootheden dichtheid, intensiteit en snelheid weergeeft, de zogenaamde fundamentele vergelijking. We hebben hier gekeken naar het lineaire model (Greenshield) en een driehoekig model. Alle gesimuleerde modellen lijken het driehoekige fundamenteel diagram te hebben. Het driehoekige model voor het fundamenteel diagram is dan ook iets ingewikkelder dan het model van Greenshield en past daardoor beter bij de verkeersmodellen die behandeld zijn in dit werkstuk. Voor het cellulaire automaten model is eveneens analytisch het fundamenteel diagram afgeleid. De simulatieresultaten blijken erg goed overeen te komen met het analytisch afgeleide fundamenteel diagram.

Bij het Intelligent Driver Model vertoont het fundamenteel erg duidelijk een omgekeerde  $\lambda$ . Uit de simulatie blijkt dat bij dit model duidelijk de overgang van de free flow fase naar de congestie fase en terug te onderscheiden is. Bij eenzelfde dichtheid is de intensiteit hoger in de free flow fase dan in de herstelfase, de fase die optreedt zodra de file zich oplost.

Tot slot is er een vergelijking gemaakt tussen het (discrete) cellulaire automaten model en het continue model van Lighthill, Whitham en Richards (LWR model). Ondanks dat beide modellen verschillend van aard zijn, lijkt de manier van het oplossen van een file in het cellulaire automaten model geheel te voldoen aan de ontwikkeling die voortkomt uit het LWR model.

# Bibliografie

- [1] Eenvoudig model voor files, *Kennislink*. <http://www.kennislink.nl/web/show?id=126601>.
- [2] File (verkeer), *Wikipedia*. [http://nl.wikipedia.org/wiki/File\\_\(verkeer\)](http://nl.wikipedia.org/wiki/File_(verkeer)).
- [3] T. Bellemans, B. De Schutter, and B. De Moor. Models for traffic control. *Journal A*, vol. 43, no. 3-4, pp. 13-22, 2002. [http://www.dcs.tudelft.nl/~bdeschutter/pub/reports/01\\_11.pdf](http://www.dcs.tudelft.nl/~bdeschutter/pub/reports/01_11.pdf).
- [4] P.J. Bickel, C. Chen, J. Kwon, J. Rice, P. Varaiya, and E. van Zwet. Traffic flow on a freeway network. *Proceeding of MSRI Workshop on Nonlinear Estimation and Classification*, Maart, pp. 405-412, 2001. <http://stat-www.berkeley.edu/users/kwon/papers/MSRI.pdf>.
- [5] H. Coninx. In tien jaar tijd een kwart meer auto's. *CBS Webmagazine*, maandag 7 februari 2005. <http://www.cbs.nl/nl-NL/menu/themas/bedrijfsleven/verkeer-vervoer/publicaties/artikelen/2005-1642-wm.htm>.
- [6] A. Hegyi, B. De Schutter, J. Hellendoorn, S.P. Hoogendoorn, and C. Tampère. Kiezen voor golven, stromen of beweging. *Verkeerskunde*, vol. 52, no. 4, pp. 32-36, 2001.
- [7] D. Heidemann. A queueing theory model of nonstationary traffic flow. *Transportation Science*, vol. 35, no. 4, pp. 405-412, November 2001.
- [8] D. Helbing. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of modern physics*, vol. 73, no. 4, oktober 2001. [http://prola.aps.org/pdf/RMP/v73/i4/p1067\\_1](http://prola.aps.org/pdf/RMP/v73/i4/p1067_1).
- [9] S.P. Hoogendoorn. *Multiclass continuum modeling of multilane traffic flow*. Trail Thesis Series nr. T99/5, 1999.
- [10] L.H. Immers and S. Logghe. Traffic flow theory. *Onderdeel van het vak 'Basics of Traffic Engineering'*, mei 2002. <http://www.kuleuven.be/traffic/dwn/H111part3.pdf>.
- [11] M.M. Minderhoud. *Supported Driving: Impacts on Motorway Traffic Flow*. Trail Thesis Series nr. T99/4, 1999.
- [12] E.J. Moet. Simulatie van fileverschijnselen. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5<sup>e</sup> serie, deel 4, nr. 2, juni 2003. <http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel04/jun2003/pdf/moet.pdf>.
- [13] C. Tampère. Filevorming en file-ontwikkeling: een kwestie van wachtrijen, veer-demper mechanismen of gasdeeltjes. *Kaleidoscoopdag wachtrijen*, 27 november 2002. <http://www.kuleuven.ac.be/traffic/dwn/res4.pdf>.

- [14] C.M.M. Tampère. *Human-Kinetic Multiclass Traffic Flow Theory and Modelling (With Application to Advanced Driver Assistance Systems in Congestion)*. Trail Thesis Series nr. T2004/11, 2004.
- [15] H.C. Tijms. *Operationele analyse, een inleiding in modellen en methoden*. Epsilon Uitgaven, 2004.
- [16] Ministerie van Verkeer en Waterstaat. *Blokrijden als wapen in de strijd tegen files*. 14 juli 2004. [http://www.verkeerenwaterstaat.nl/cgi-bin/nieuws/vwn\\_p.pl?arch\\_srcID=2955&id=1](http://www.verkeerenwaterstaat.nl/cgi-bin/nieuws/vwn_p.pl?arch_srcID=2955&id=1).

# Index

- afstand, [5](#)
- behoud van voertuigen, [8](#)
- bottleneck, [3](#)
- capaciteit, [3](#)
- congestie, [3](#), [10](#)
- dichtheid, [7](#), [23](#)
- faseovergang, [10](#)
- file, [3](#)
- free flow, [10](#)
- fundamenteel diagram, [9](#)
- fundamentele vergelijking, [8](#)
- gap, [5](#)
- headway, [5](#)
- homogeniteit, [9](#)
- intensiteit, [7](#), [23](#)
- Kendall's notatie, [27](#)
- modellen
  - cellulaire automaten, [17](#), [20](#)
  - continu, [5](#)
  - deterministisch, [5](#)
  - discreet, [5](#)
  - follow the leader, [17](#)
  - Intelligent Driver Model, [19](#)
  - macroscopisch, [5](#)
  - mesoscopisch, [5](#)
  - microscopisch, [5](#)
  - stimulus-response, [19](#)
  - stochastisch, [5](#)
  - total safety distance, [18](#)
- peloton, [13](#)
  - gap, [13](#)
- pixels, [36](#)
- plaats-tijd-diagram, [13](#)
- Poisson proces, [26](#)
- ronde weg, [38](#)
- snelheid, [7](#), [23](#)
- stabiliteit, [13](#)
- stationariteit, [9](#)
- stop and go waves, [45](#)
- trajectorie, [5](#)
- verkeer
  - file, [39](#)
  - langzaam rijdend, [3](#)
  - langzaam rijdend tot stilstaand, [3](#)
  - stilstaand, [3](#)
  - uniform, [39](#)
- wetten
  - behoud van voertuigen, [23](#)